Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen und Variationsrechnung"

Dr. Julian Scheuer WS 2016/17

Blatt 1 20. Oktober 2016

Aufgabe 1 [Banachscher Fixpunktsatz]

Finden Sie Gegenbeispiele zum Banachschen Fixpunktsatz, falls

(a) der metrische Raum M nicht als vollständig vorausgesetzt wird

oder

(b) falls die Kontraktion T nur als schwache Kontraktion vorausgesetzt wird, d.h.

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Aufgabe 2 [Raum stetiger Funktionen]

Beweisen Sie: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist der Vektorraum der stetigen Funktionen von M nach $\mathbb{R}^m$, $C^0(M, \mathbb{R}^m)$, mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|$$

ein Banachraum.

Aufgabe 3 [Separation der Variablen]

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \colon J \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und seien $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $at_0 + bx_0 + c \in J$. Nehme an, x löse

$$\dot{x}(t) = f(at + bx + c)$$

lokal um t_0. Leiten Sie eine Differentialgleichung für

$$u(t) = at + bx(t) + c$$

her. Welche Form hat die entstehende Differentialgleichung?

Verwenden Sie diese Methode, um die allgemeine Lösung (d.h. beliebige Anfangswerte) von

$$\dot{x}(t) = (t + x(t))^2$$

zu finden.

(b) Verfahren Sie ähnlich wie in (a), um Gleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$

zu behandeln und finden Sie die lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \frac{1}{t}\left(x(t) + \sqrt{t^2 - x^2(t)}\right), \quad x(1) = 0.$$

Hinweis: Zur einer Lösung gehört auch die Angabe des Definitionsbereichs der Lösung.

Aufgabe 4

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $x \equiv 0$ die einzige Lösung von

$$\dot{x}(t) = -tf(x(t))$$

mit $x(0) = 0$ ist.

(Tipp: Widerspruchsbeweis und Separation der Variablen.)

Jede Aufgabe gibt 4 Punkte. Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 28.10.2016, vor der Vorlesung.