Übungen zur Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen und Variationsrechnung”

Dr. Julian Scheuer — WS 2016/17
Blatt 2 — 27. Oktober 2016

Aufgabe 1 [Eindeutigkeit maximaler Lösungen]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Seien $x_i \in C^1(I_i, \Omega)$, $i = 1, 2$, maximal definierte Integralkurven von f, die sich schneiden. Beweisen Sie:
Es existiert $\tau \in \mathbb{R}$, sodass $I_1 = I_2 + \tau$ und

$$x_1(t + \tau) = x_2(t) \quad \forall t \in I_2.$$

Aufgabe 2 [Vergleichsprinzip]

Sei $J = [0, b)$, $g \in C^0(J, \mathbb{R})$ und nehme an, $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ löse die Differentialungleichung

$$\dot{x}(t) \geq g(t)x(t) \quad \forall t \in J.$$

Beweisen Sie: Falls $x(0) \geq 0$, so gilt auch $x(t) \geq 0$ $\forall t \in J$.

Aufgabe 3 [Schnelles Wachstum]

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und nehme an, es existieren $c, \epsilon > 0$ mit

$$\langle f(x), x\rangle \geq c\|x\|^{2+\epsilon} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $x = x(t)$ eine Integralkurve von f mit $x_0 \neq 0$ und maximalen Definitionsinterval $I = (a, b)$. Beweisen Sie, dass b dann a priori beschränkt ist, d.h.

$$b \leq \mathrm{const}(x_0, c, \epsilon).$$

Aufgabe 4 [Weniger Annahmen im lokalen Existenzsatz]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^0(J \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ sei *lokal gleichmäßig Lipschitz-stetig bzgl. x*, d.h.

$$\forall J_0 \times \Omega_0 \Subset J \times \Omega \; \exists K \geq 0 \; \forall t \in J_0 \; \forall x, y \in \Omega_0\colon |f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Sei $t_0 \in J$ und $x_0 \in \Omega$.
Beweisen Sie: Es existiert ein Intervall $I_{t_0,x_0} = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, sodass eine eindeutige Lösung des AWP

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

existiert.

Jede Aufgabe gibt 4 Punkte. Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 03.11.2016, vor der Vorlesung.