Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen und Variationsrechnung"

Dr. Julian Scheuer
Blatt 3

WS 2016/17
03. November 2016

Aufgabe 1 [Global definierte Geodäten]

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine kompakte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^3, $x_0 \in M$ und $v_0 \in T_{x_0}M$. Beweisen Sie, dass die maximale Geodäte γ mit Anfangswerten $\gamma(0) = x_0$ und $\dot{\gamma}(0) = v_0$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Aufgabe 2 [Geodäten der Sphäre]

Berechnen Sie für $n \geq 2$ alle Geodäten auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |x| = 1\}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$.

Aufgabe 3 [Existenz für lineare Systeme]

(i) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in J$ und

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{1}$$

eine inhomogen lineare Differentialgleichung mit $A \in C^0(J, \mathbb{K}^{n\times n})$ und $b \in C^0(J, \mathbb{K}^n)$. Dann existiert zu jedem $\xi \in \mathbb{K}^n$ eine eindeutige Lösung $x \colon J \to \mathbb{K}^n$ von (1) mit $x(t_0) = \xi$.
(ii) Ist $b = 0$ und sind x_i, $1 \leq i \leq k$, Lösungen von (1) zu den Anfangswerten ξ_i, so gilt

$$\{\xi_i\} \text{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \{x_i(t)\} \text{ linear unabhängig } \forall t \in J.$$

(iii) Die Menge der Lösungen $x \in C^1(J, \mathbb{K}^n)$ von (1) mit $b = 0$ bildet einen n-dimensionalen Untervektorraum von $C^1(J, \mathbb{K}^n)$ und für jedes $t_0 \in J$ ist $\xi \mapsto x(\cdot, t_0, \xi)$ ein Isomorphismus auf den Lösungsraum, wobei $(t, \tau, \xi) \to x(t, \tau, \xi)$ der globale Fluss von (1) ist.

Aufgabe 4 [Reelle und komplexe Systeme]

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall un $A \in C^0(J, \mathbb{R}^{n\times n})$ und betrachten Sie die lineare Gleichung

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{2}$$

Beweisen Sie:
(i) Ist z eine komplexwertige Lösung von (2), so sind $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ reellwertige Lösungen von (2).
(ii) Ist $(z_1, \ldots, z_n)$ eine Basis des komplexen Lösungsraumes von (2), so wird der reelle Lösungsraum von (2) erzeugt von den Real- und Imaginärteilen der z_i.
(iii) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ von

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t & -t \\ t & 2t \end{pmatrix} x(t). \tag{3}$$

Jede Aufgabe gibt 4 Punkte. Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 10.11.2016, vor der Vorlesung.