Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen und Variationsrechnung"

Dr. Julian Scheuer — WS 2016/17
Blatt 4 — 10. November 2016

Aufgabe 1 [Exponentialfunktion für Matrizen]

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und B invertierbar. Beweisen Sie, dass

$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}.$$

Aufgabe 2 [Phasenportraits]

Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungen von $\dot{x} = Ax$ und zeichnen Sie einige der jeweiligen Lösungskurven $t \mapsto x(t)$ in ein (x^1-x^2)-Koordinatensystem (ein sog. *Phasenportrait*).

Aufgabe 3 [Lineare Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten] Betrachte

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = 0, \quad a_n = 1, a_j \in \mathbb{K}. \tag{1}$$

Sei λ Nullstelle des Polynoms

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

mit Vielfachheit $m(\lambda)$. Zeigen Sie: Dann bilden die Funktionen

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{(m(\lambda_1)-1)}e^{\lambda_1 t}$$

eine Basis des Lösungsraumes der Gleichung (1), wobei λ alle Nullstellen von $A(\lambda)$ durchläuft. Sind alle $a_i \in \mathbb{R}$, so erhält man eine reelle Basis des Lösungsraumes von (1) durch

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{(m(\lambda)-1)}e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, A(\lambda) = 0$$

$$t^q e^{\mu t}\cos(\nu t), t^q e^{\mu t}\sin(\nu t), \quad \lambda = \mu + i\nu, \nu > 0, 0 \le q \le m(\lambda) - 1, A(\lambda) = 0.$$

Aufgabe 4 [Gleichungen höherer Ordnung]

(i) Bestimmen Sie (mit Lösungsweg) die allgemeine (reelle) Lösung des harmonsichen Oszillators

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0,$$

mit $\omega_0 > 0$.
(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 5x(t) = e^t.$$

Jede Aufgabe gibt 4 Punkte. Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 17.11.2016, vor der Vorlesung.