Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen und Variationsrechnung"

Dr. Julian Scheuer — WS 2016/17
Blatt 5 — 17. November 2016

Aufgabe 1 [Vergleichsprinzip 2]

Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $t_0 \in I$. Nehme an, die nichtnegative Funktion $x\colon I \to \mathbb{R}$ erfülle die Differentialungleichung

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t)| &\leq ax(t) + b \quad \forall t \in I \\ x(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$x(t) \leq \frac{b}{a} e^{a|t-t_0|}.$$

Aufgabe 2 [Formales Differenzieren]

Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ bezeichne $x = x(t, \lambda_1, \lambda_2)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_1 x(t) + \lambda_2 t x^2(t) \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $\partial_{\lambda_1} x$ und $\partial_{\lambda_2} x$ jeweils an der Stelle $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda, 0)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben ist.

Aufgabe 3 [Parameterabhängige Gleichung]

Sei $x = x(t, \lambda)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \lambda) &= \cos(\lambda t x(t)) x(t) + \lambda \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$x(1, \lambda) > e \quad \forall 0 < \lambda < \epsilon.$$

Aufgabe 4 [Regularität des globalen Flusses]

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, $E \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^k(D \times E, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$. Zeigen Sie, dass der globale Fluss von der Klasse C^k ist,

$$x \in C^k(\mathcal{D}(f), \mathbb{R}^n).$$

Hinweis: Sie dürfen den Fall $k = 1$ als bekannt voraussetzen.

Jede Aufgabe gibt 4 Punkte. Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 24.11.2016, vor der Vorlesung.