

Übungen zur Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen und Variationsrechnung”

Dr. Julian Scheuer
Blatt 6

WS 2016/17
24. November 2016

Aufgabe 1 [Vektorfelder erzeugen dynamische Systeme]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Sei \tilde{x} der globale Fluss von f . Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$x(t, \xi) = \tilde{x}(t, 0, \xi)$$

auf der Menge

$$\mathcal{D}_0(f) = \{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \Omega : (t, 0, \xi) \in \mathcal{D}(f)\}$$

ein dynamisches System der Klasse C^k definiert.

Aufgabe 2 [Disjunkte Orbits]

Sei M ein metrischer Raum und $x \in C^0(\mathcal{D}_0, M)$ ein dynamisches System. Beweisen Sie:

(i) Die Relation

$$\xi \sim \eta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \xi_0 \in M \exists t, s \in I_{\xi_0} : \xi = x(t, \xi_0) \text{ und } \eta = x(s, \xi_0)$$

ist eine Äquivalenzrelation auf M .

(ii) Die Menge der Orbits bildet eine disjunkte Zerlegung von M .

Aufgabe 3 [Gleichmäßige Lebenszeit]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Seien ω_+ und ω_- die Fluchtzeiten des von f erzeugten dynamischen Systems. Beweisen Sie: Zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ existieren $a, b \in \mathbb{R}$, sodass

$$\omega_-(\xi) \leq a < 0 < b \leq \omega_+(\xi) \quad \forall \xi \in K.$$

Aufgabe 4 [Mäuse im Quadrat]

Vier Mäuse werden in den vier Ecken eines Quadrats platziert, sodass jede Maus die im Uhrzeigersinn folgende Ecke im Blick hat. Da ein hinterlistiger Forscher jeder Maus ein Stück Käse auf den Rücken gebunden hat, läuft jede Maus zu jeder Zeit auf die Maus zu, die sie zu Beginn im Blick hat, und zwar mit Geschwindigkeit gleich dem Abstand zu dieser Maus.

Bestimmen Sie die von den Mäusen durchlaufenen Kurven und den Zeitpunkt des Zusammentreffens. Berechnen Sie die zurückgelegten Wege und skizzieren Sie das Phasenportrait.

Jede Aufgabe gibt 4 Punkte. Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 01.12.2016, vor der Vorlesung.