

Übungen zur Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen und Variationsrechnung”

Dr. Julian Scheuer
Blatt 7

WS 2016/17
01. Dezember 2016

Aufgabe 1 [Grenzverhalten linearer Systeme]

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gelten für alle Lösungen $\dot{x} = Ax$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \operatorname{Re} \lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = \infty \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \operatorname{Re} \lambda > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 2 [Klassifikation ebener Flüsse]

Zeichnen Sie die Phasenportraits zu allen möglichen Eigenwertkonstellationen bei ebenen reellen linearen Flüssen nach Transformation in Jordanform.

Aufgabe 3 [Hyperbolische Flüsse]

Man bestimme für die Matrizen

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}, \tag{3}$$

ob sie hyperbolisch sind und bestimme gegebenenfalls die Zerlegungen des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 in E_s und E_u .

Aufgabe 4 [Räuber-Beute-Modell]

Gegeben sei das folgende nichtlineare System auf \mathbb{R}^2 mit positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - \beta y - \lambda x) x \\ \dot{y} &= (\delta x - \gamma - \mu y) y. \end{aligned} \tag{4}$$

- (a) Wer sind die Räuber und wer ist die Beute?
- (b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des zugehörigen dynamischen Systems und analysieren Sie deren Stabilität.
- (c) Für $\lambda = \mu = 0$ ergibt sich die sogenannte Lotka-Volterra-Gleichung. Bestimmen Sie in diesem Fall die kritischen Punkte und das Spektrum der Linearisierung.

Am Dienstag, den 06.12. fällt die Vorlesung aus. Jede Aufgabe gibt 4 Punkte. Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 08.12.2016, vor der Vorlesung. Für diejenigen, die Studien- oder Prüfungsleistungen nur in der 2-stündigen Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen” erwerben wollen, ist dies das letzte leistungsrelevante Blatt.