Aufgabe 1 (*Weierstraß*, 6 Punkte)
Wir betrachten auf $\mathcal{C} = \{u \in C^1(I) : u(1) = 1,\, u(-1) = -1\}$, $I = [-1, 1]$, das Funktional

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R},\ \mathcal{F}(u) = \int_{-1}^{1} x^2 u'(x)^2 \, dx.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\inf \{\mathcal{F}(u) : u \in \mathcal{C}\} = 0$.

(b) Es gibt kein $u \in \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}(u) = 0$.

(c) Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung: $u(x) = -a/x + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Aufgabe 2 (*Kürzeste auf der Sphäre*, 6 Punkte)
Sei $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Wir betrachten die Kurve

$$c : [0, \theta] \to \mathbb{S}^2,\ c(t) = \cos t\, N + \sin t\, V, \qquad \text{wobei } N = (0, 0, 1),\ |V| = 1 \text{ und } V \perp N.$$

Ist $c(t)$ kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte unter auf $\mathbb{S}^2$? Zeigen Sie dazu:

(0) Die Länge von c ist $\mathcal{L}(c) = \theta$.

(1) Für $\theta > \pi$ ist c keine Kürzeste.

(2) Für $\theta \leq \pi$ ist c Kürzeste.

(3) Für $\theta = \pi$ gibt es viele Kürzeste mit denselben Endpunkten.

Hinweis für (2): Für (2) betrachten Sie $r(x) = \arccos x_3$.

Aufgabe 3 (*Elastische Energie*, 4 Punkte)
Die elastische Energie eines gebogenen Stabs ist bei ideal kleiner Auslenkung

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_I u''(x)^2 \, dx.$$

Zeigen Sie dass ein Minimierer $u \in C^4(I)$ mit festen Randwerten die Euler-Lagrange Gleichung $u^{(\mathtt{iv})} = 0$ erfüllt.

Abgabe am Donnerstag, 22.12.2016.