Aufgabe 1 (*Variation der Bogenlänge*), 8 Punkte)
Sei $\gamma \in C^2([0,L],\mathbb{R}^2)$, $\gamma = \gamma(s)$, eingebettete Kurve mit $|\gamma'(s)| = 1$.

(a) Für die Variation der Bogenlänge $\mathcal{L}$ gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\gamma + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = \int_0^L \langle \vec{\varkappa}, \phi\rangle\, ds + \Big[\langle \gamma'(s), \phi(s)\rangle\Big]_{s=0}^{s=L} \quad \text{wobei } \vec{\varkappa} = \gamma''.$$

(b) Sei $J \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Drehung um 90° im positiven Sinn. Betrachte

$$\mathcal{A}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^L \langle J\gamma, \gamma'\rangle\, ds.$$

Verifizieren Sie: durchläuft γ den Rand eines (stückweise) glatten Gebiets in geigneter Orientierung, so ist $\mathcal{A}(\gamma)$ der eingeschlossene Flächeninhalt.

(c) γ sei Kürzeste unter der Bedingung, dass die Endpunkte auf dem Rand ∂G eines Gebiets liegen, und dass das von γ und ∂G zusammen eingeschlossene Gebiet Flächeninhalt A hat (Skizze). Zeigen Sie folgende Ausssagen:

$$\begin{aligned} \vec{\varkappa} &= \lambda\, J\gamma' && \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet,} \\ \langle \gamma', \tau_{\partial G}\rangle &= 0 && \text{für } s = 0, L, \text{ mit } \tau_{\partial G} \text{ Tangentenvektor von } \partial G. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*Drehimpulserhaltung*, 8 Punkte)
Sei $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ Lagrangefunktion mit $f(t, Rx, Rp) = f(t, x, p)$ für $R \in \mathbb{SO}(n)$. Zeigen Sie:

(1) Es gilt $\mathcal{F}(Rx) = \mathcal{F}(x)$ für alle $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

(2) Für eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen und $\Omega \in \mathfrak{so}(n)$ gilt

$$\langle f_p(t, x, x'), \Omega x\rangle = \text{konstant},$$

(3 Im Fall $f(t, x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - V(|x|)$, $n = 3$, kann das wie folgt geschrieben werden:

$$x(t) \times x'(t) = \text{konstant}.$$

(4) Folgern Sie aus (3): die Bewegung findet in einer Ebene statt, und die Flächengeschwindigkeit (die Ableitung der überstrichenen Fläche $\mathcal{A}(t)$) ist konstant.
Hinweis. Das hatte Kepler aus Messungen des Astronomen Tycho Brahe erkannt, (Astronomia Nova 1609), als Grund sah er die Harmonie der Welt an. Newton konnte es aus dem dynamischen Grundgesetz und dem Gravitationsgesetz herleiten (1687).

Abgabe am Donnerstag, 12.1.2017.