Aufgabe 1 (*Hamilton-Jacobi Gleichung*, 8 Punkte)
Betrachten Sie für $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(z) > 0$, die Lagrangefunktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x, z, v) = \sqrt{g(z)(1 + v^2)}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße für die Euler-Lagrange Gleichungen.

(b) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion und die Hamilton-Jacobi Gleichung.

(c) Bestimmen Sie die Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung, und damit die Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung.

Aufgabe 2 (*Satz von Liouville*, 8 Punkte)
Auf $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sei $J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$, $J(z, p) = (p, -z)$. Für eine gegebene Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$, $H = H(z, p)$, sei $\phi \in C^2(I \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ Lösung von

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (J\,\nabla H) \circ \phi, \quad \phi(0, \cdot) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für feste $(z, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ setze $\phi(t, z, p) =: (u(t), q(t))$. Dann lösen $u(t)$, $q(t)$ die kanonischen Differentialgleichungen.

(b) Für $U \subset\subset \mathbb{R}^{2n}$ gilt $\frac{d}{dt}\mathrm{vol}(\phi(t, U))|_{t=0} = 0$.

(c) $\mathrm{vol}(\phi(t, U))$ ist konstant.

Abgabe am Donnerstag, 19.1.2017.