Aufgabe 1 (*Riemannsche Metriken*, 8 Punkte)
Gegeben sei auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen die Lagrangefunktion

$$f(x, z, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(z) v_i v_j,$$

mit $g_{ij} \in C^2(U)$ symmetrisch und strikt positiv definit. Das durch f definierte Funktional ist die Energie einer Kurve bezüglich der Riemannschen Metrik g, die kritischen Punkte heißen Geodätische.

(a) Berechnen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion.

(b) Berechnen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung, sowie die stationäre Form.

(c) Geben Sie im Fall $g_{ij} = \delta_{ij}$ examplarisch zwei Lösungen der stationären Hamilton-Jacobi-Gleichung an (Distanzfunktionen).

Aufgabe 2 (*konvexe Funktionen*, 8 Punkte)
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) f' ist monoton wachsend auf (a, b).

(b) f ist konvex.

(c) $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ für alle $x_0, x_1 \in (a, b)$.

(d) $f'' \geq 0$ (im Fall f zweimal differenzierbar auf (a, b)).

Aufgabe 3 (*konvexe Funktionen II*, 8 Punkte)
Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie:

(a) f ist nach oben beschränkt.

(b) f ist nach unten beschränkt.

(c) f ist Lipschitzstetig.

Aufgabe 3 ist (schwierigere) Alternative für diejenigen, die Aufgabe 2 schon kennen. Abgabe am Donnerstag, 26.1.2017.