Aufgabe 1 (*Kürzeste Verbindung von drei Punkten*, 8 Punkte)
Gegeben sei ein abgeschlossenes Dreieck Δ in $\mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten a_1, a_2, a_3. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ heißt Steinerpunkt, wenn gilt:

$$L(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} L(x) \quad \text{ mit } L(x) = \sum_{i=1}^{3} |x - a_i|.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen Steinerpunkt.

(b) Jeder Steinerpunkt liegt in Δ.

(c) Ist x Steinerpunkt und $x \notin \{a_1, a_2, a_3\}$, so sind die Winkel $\angle(p_{i-1} x p_i)$ gleich $\frac{2\pi}{3}$.

(d) Ist der Winkel von Δ bei a_i mindestens $\frac{2\pi}{3}$, so ist a_i der eindeutige Steinerpunkt.

(e) Sind alle Winkel von Δ kleiner als $\frac{2\pi}{3}$, so gibt es einen Punkt x wie in (c), und dieser ist der eindeutige Steinerpunkt.

Aufgabe 2 (*innere Metriken*, 8 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und $g \in C^0(M, \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $g(x)$ symmetrisch und strikt positiv definit. Wir definieren $d : M \times M \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \Big\{ L_g(\gamma) : \gamma : [a, b] \to M \text{ stückweise } C^1\, \gamma(a) = p,\, \gamma(b) = q \Big\}.$$

wobei $L_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g \circ \gamma(\gamma', \gamma')}\, dt$. Zeigen Sie, dass $d(x, y)$ eine Metrik ist, deren induzierte Topologie gleich der Standardtopologie auf M ist.

Abgabe am Donnerstag, 2.2.2017.