Aufgabe 1 (*L^2-Abschätzungen: Absorptionstechnik*)
Sei $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ und $u \in W^{2,2}(D)$ erfülle die Ungleichung

$$|\Delta u| \leq \Lambda\, |Du|^2 \qquad \mathcal{L}^2\text{-fast-überall auf } D.$$

Zeigen Sie die Existenz universeller Konstanten $c > 0$ und $C < \infty$, so dass gilt:

$$|\Lambda|\, \|Du\|_{L^2(D)} < c \quad \Rightarrow \quad \|D^2 u\|_{L^2(B_{\frac{1}{2}})} \leq C\, \|Du\|_{L^2(D)}.$$

Anleitung: Sie können annehmen dass $\int_D u = 0$. Leiten Sie mit der Vorlesung eine L^2-Abschätzung für $D^2(\eta u)$ her, und verwenden Sie dann für den quadratischen Term die Soboleveinbettung $W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 2 (*Differenzenquotienten*)
Finden Sie ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Lip}(\Omega)$ echter Unterraum von $W^{1,\infty}(\Omega)$ ist. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für Ω, damit die Räume gleich sind.

Aufgabe 3 (*Differenzenquotienten*)
Konstruieren Sie ein Beispiel einer Funktion $u : I = (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $u \notin W^{1,1}(I)$, aber $\|\Delta^h u\|_{L^1} \leq C$ unabhängig von $h \neq 0$. Lemma 1.3 gilt also nicht für $p = 1$.

Aufgabe 4 (*L^2 a priori Abschätzungen*)
Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq L < \infty$, und $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ löse die Gleichung

$$-\Delta u + \varphi(u) = f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe A1 (*Caccioppoli-Ungleichungen: Anwesenheitsübung*)
Sei $u \in W^{1,2}(B_R(x_0))$ harmonisch, also $\Delta u = 0$. Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} |Du|^2 \leq \frac{C}{R^2} \int_{B_R(x_0) \setminus B_{\frac{R}{2}}(x_0)} |u - a|^2$$

Wählen Sie a als Mittelwert von u auf dem Annulus und schließen Sie mit der Poincaré-Ungleichung

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} |Du|^2 \leq \theta \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 \text{ für ein } \theta = \theta(n) \in (0, 1).$$

Zeigen Sie: jede beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist konstant (Liouville).

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben. Abgabe am Mittwoch 27.04.2005.