Aufgabe 1 (*Zur Legendre-Hadamard Bedingung I*)
Für $a^{ij}_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq i,j \leq n$, $1 \leq \alpha, \beta \leq N$ gelte

$$B(\varphi,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} a^{ij}_{\alpha\beta} \partial_i \varphi^\alpha \partial_j \varphi^\beta \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N).$$

Folgern Sie daraus die Legende-Hadamard-Bedingung

$$a^{ij}_{\alpha\beta} \xi_i \xi_j \eta^\alpha \eta^\beta \geq 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Anleitung: Wählen Sie $\varphi(x) = \gamma(x) e^{it\langle \xi, x\rangle}\eta$.

Aufgabe 2 (*Legendre-Hadamard Bedingung II*)
Betrachten Sie für $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n})$ das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx, \quad \text{wobei } u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N).$$

Es gelte $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + t\phi)$ für alle $\phi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Folgern Sie mit Aufgabe 1 die Legendre-Hadamard-Bedingung für die Koeffizienten

$$a^{ij}_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial p^\alpha_i \partial p^\beta_j}(x, u(x), Du(x)).$$

Anleitung: Verwenden Sie $\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}(u + t\phi)|_{t=0} \geq 0$ und wählen Sie $\Phi(x) = \varphi(\frac{x - x_0}{\varrho})$.

Aufgabe 3 (*Sobolevräume auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*)
Definieren Sie den Sobolevraum $W^{k,p}(M)$ sowie den Begriff des elliptischen Operators für eine kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit M (ohne Rand), und begründen Sie die Gültigkeit der globalen L^2 a priori Abschätzungen.

Aufgabe 4 (*Biharmonische Funktionen*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glattes Gebiet. Formulieren Sie die Randwertaufgabe für den Bi-Laplaceoperator

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \Delta u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

als Problem für ein System zweiter Ordnung, und zeigen Sie damit die Existenz einer Lösung.

Anwesenheitsaufgabe (*Schwache und klassische Lösungen*)
Betrachten Sie für ein beschränktes $C^{2,\alpha}$-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und Koeffizienten $a^{ij}, b^i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c^i, q, f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ den Operator

$$L : W^{1,2}_0(\Omega) \to W^{1,2}_0(\Omega)',\ Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_i u) - \partial_j(b^j u) + c^j \partial_j u + qu.$$

Zeigen Sie: ist die schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, so folgt $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall $q - \partial_j b^j \geq 0$ und verwenden Sie die Schauder-Lösungstheorie und das schwache Maximumprinzip.

Bearbeiten Sie zwei der vier Aufgaben. Abgabe am Mittwoch 4.5.2005.