Aufgabe 1 (*Einfachheit des ersten Eigenwerts*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, und $Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + qu$ mit $a^{ij} = a^{ji}$ und $a^{ij}, q \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie: ist $\lambda \in \mathbb{R}$ der kleinste Eigenwert von L bezüglich Nullrandwerten, so ist der zugehörige Eigenraum eindimensional und die Eigenfunktion hat keine Nullstelle in Ω.
Anleitung: Maximumprinzip von Hopf für $v = |u|$.

Aufgabe 2 (*Grenzwerte von L^p-Normen*)
Sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) = 1$, und $u : X \to [0,\infty]$ sei μ-messbar. Bestimmen Sie für $p \nearrow \infty$, $p \searrow -\infty$ und $p \to 0$ die Grenzwerte der Funktion

$$\phi(p) = \left(\int_X u^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Anwesenheitsaufgabe (*Nichtlineares Maximumprinzip*)
Für offenes und beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^2-Rand betrachten wir die voll nichtlineare, elliptische Differentialgleichung

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Dabei sei $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n})$ mit

$$\frac{\partial F}{\partial Q_{ij}}(x,z,p,Q)\xi_i\xi_j > 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \text{ und } \frac{\partial F}{\partial z}(x,z,p,Q) \leq 0.$$

Sind dann $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $u \leq v$ auf $\partial\Omega$ und

$$F(\cdot, v, Dv, D^2v) \leq 0 \leq F(\cdot, u, Du, D^2u) \quad \text{in } \Omega,$$

so folgt $u \leq v$ in Ω.

Bearbeiten Sie beide Aufgaben. Abgabe am Mittwoch 11.5.2005.