Aufgabe 1 (*Skalierung*)
Folgern Sie Satz 3.3 für beliebige $R > 0$ aus dem Fall $R = 1$.

Aufgabe 2 (*Globale Harnackungleichung*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet und $u : \Omega \to [0, \infty)$ messbar. Es gebe eine Konstante $\gamma < \infty$ mit

$$\sup_{B_r(x)} u \leq \gamma \inf_{B_r(x)} u \quad \text{für alle } B_r(x) \subset \Omega.$$

Zeigen Sie für jede relativ kompakte, offene Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ die Abschätzung

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u \quad \text{mit } C = C(\gamma, \Omega, \Omega').$$

Anwesenheitsaufgabe (*Parabolische Supremumsabschätzung*)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T))$, $n \geq 3$, eine nichtnegative, $\mathbb{Z}^n$-periodische Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0.$$

Zeigen Sie für $\Omega = (0,1)^n$ und $0 < \tau \leq 1$ die Abschätzung

$$\sup_{\Omega} u(\cdot, \tau) \leq C(n) \tau^{-\frac{n}{4}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Anleitung: durch Testen mit $\varphi = u^{1+2\alpha}$ ergibt sich für $w = u^{1+\alpha}$ die Ungleichung

$$0 \leq \int_{\Omega} |Dw(\cdot, t)|^2 \leq -\frac{1+\alpha}{2(1+2\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 \right)(t).$$

Integrieren von t_1 bis t_2 und Sobolev ergibt

$$\left(\int_{\Omega} w(\cdot, t_2)^{2\kappa} \right)^{1/\kappa} \leq \frac{C(n)}{t_2 - t_1} \int_{\Omega} w(\cdot, t_1)^2.$$

Jetzt iterieren Sie mit $1 + \alpha = \kappa^\nu$ und $t_\nu = (1 - 2^{-\nu})\tau$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Bearbeiten Sie beide Aufgaben. Abgabe am Mittwoch 18.5.2005.