Aufgabe 1 (*Harnackungleichung auf* $\mathbb{R}^n$)
Zeigen Sie für eine Lösung u der gleichmäßig elliptischen Gleichung $\partial_j(a^{ij}\partial_i u) = 0$ auf $\mathbb{R}^n$ folgende Aussagen, wobei $M(r) = \max_{|x|=r} u(x)$ und $m(r) = \min_{|x|=r} u(x)$:

(1) M ist nichtfallend, und m ist nichtwachsend.

(2) Entweder ist u konstant, oder es gibt Konstanten $c_0 > 0$, $\alpha > 0$ und $C < \infty$ mit $M(r) - m(r) \geq c_0 r^\alpha - C$.

(3) Falls u beschränkt ist, ist u konstant (Satz von Liouville).

Aufgabe 2 (*Bernsteinsatz für Minimalflächen*)
Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Minimalfläche, die als Graph der glatten Funktion $u : \mathbb{R}^n \to R$ gegeben ist. Zeigen Sie: ist die Steigung des Graphen, also Du, beschränkt, so ist u affin-linear und damit Σ eine Hyperebene.

Bemerkung. Für $n \leq 7$ gilt der Satz auch ohne die Schranke an die Steigung. Im Fall $n = 2$ kann man das auf den klassischen Satz von Liouville zurückführen, während für $3 \leq n \leq 7$ Geometrische Maßtheorie benötigt wird. Für $n \geq 8$ gibt es Gegenbeispiele.

Anwesenheitsaufgabe (*Nichtlineares Eigenwertproblem*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung der Gleichung

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u, \quad \text{wobei } 1 < p < \frac{n+2}{n-2}.$$

Zeigen Sie der Reihe nach:

(1) $u \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für ein $\alpha > 0$.

(2) $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (vgl. Anwesenheitsübung, Serie2).

(3) Aus $u \geq 0$ folgt $u > 0$ und $u \in C^\infty(\Omega)$ (z.B. mit Hopf-Maximumprinzip).

(4) Die Gleichung besitzt eine strikt positive Lösung $u \in W_0^{1,2} \cap C^\infty(\Omega)$ (Minimieren Sie das Dirichletintegral unter der Nebenbedingung $\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1$).

Bearbeiten Sie beide Aufgaben. Abgabe am Mittwoch 25.5.2005.