Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. E. Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Hauptthema dieser Vorlesung ist die Theorie linearer elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dieses Teilgebiet der partiellen Differentialgleichungen ist einerseits gut und systematisch entwickelt, andererseits gibt es diverse Anwendungen in Geometrie und Naturwissenschaften, die auf spezifische mathematische Probleme führen.

Ein Beispiel eines linearen, elliptischen Differentialoperators zweiter Ordnung ist der Laplaceoperator Δ_g einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. In lokalen Koordinaten ist

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\alpha \Big(\sqrt{\det g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta u \Big).$$

Zentrale Frage ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung u der Gleichung $-\Delta_g u = \phi$, also die Frage der Surjektivität und Injektivität von Δ_g. Dazu muss der Operator in einem passenden funktionalanalytischen Kontext betrachtet werden; das sind für uns entweder die Sobolevräume $W^{1,2}(M)$ oder die Hölderräume $C^{2,\alpha}(M)$. Im Vergleich zu einem Gleichungssystem mit endlich vielen Variablen liegt die Hauptschwierigkeit in der Kompaktheit, da die beteiligten Räume unendlichdimensional sind. Schlüssel zum Abbildungsverhalten sind dann die sogeannten *a priori* Abschätzungen

$$\|u\|_{W^{1,2}(M)} \leq C \left(\|\Delta_g u\|_{W^{-1,2}(M)} + \|u\|_{W^{-1,2}(M)} \right),$$

beziehungsweise im Fall der Hölderräume

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(M)} \leq C \left(\|\Delta_g u\|_{C^{0,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^{0,\alpha}(M)} \right).$$

Grundsätzlich arbeiten wir immer auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die globale Aussage ergibt sich dann mit einem Überdeckungsargument. Es werden keine Vorkenntnisse zu differenzierbaren Mannigfaltigkeiten benötigt.

Zu gegebener Zeit werden wir auch parabolische Differentialgleichungen betrachten, also zum Beispiel die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta_g u = f \quad \text{für } u : M \times [0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Die Idee ist, dass sich die Temperatur $u = u(x,t)$ unter Diffusion ändert, bis für $t = \infty$ die Gleichgewichtslage erreicht ist. Dieser Ansatz war in der Geometrischen Analysis sehr erfolgreich, unter anderm beim Beweis der Vermutung von Poincaré.

Literatur

[1] Alt, H.W., *Lineare Funktionalanalysis*, Springer Lehrbuch 2012 (6. Auflage).

[2] Friedman, A., *Partial differential equations of parabolic type*, Dover 2008.

[3] Gilbarg, D., Trudingen, N.,*Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Grundlehren 224, Berlin Heidelberg 2001.

1 L^2-Theorie für elliptische Differentialgleichungen

1.1 Variationsrechnung

Die Variationsrechnung betrachtet Funktionale der Form $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x,u(x),Du(x))\,dx$. Kritische Punkte des Funktionals erfüllen die Euler-Lagrange Gleichung, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Für Minimierer folgt zusätzlich die Bedingung von Legendre-Hadamard.

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir beginnen mit einer Lösung $u \in C^2(\Omega)$ der Poissongleichung (oder inhomogenen Laplacegleichung)

$$-\Delta u = q \text{ in } \Omega, \qquad \text{für } q \in C^0(\overline{\Omega}). \tag{1.1}$$

Physikalisch stellt die Funktion $q(x)$ eine Ladungsdichte dar, und $u(x)$ ist das zugehörige elektrische Potential. Ausgangspunkt der Variationsrechnung ist die Beobachtung, dass die Lösung eine Minimumeigenschaft hat. Betrachte das Funktional

$$\mathcal{F} : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R},\, \mathcal{F}(v) = \int_\Omega \big(\frac{1}{2}|Dv|^2 - qv\big).$$

Wir fordern $v \in C^1(\overline{\Omega}))$ damit das Integral existiert. Nun berechnen wir für $\varphi \in C^1_c(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u+\varphi) - \mathcal{F}(u) &= \int_\Omega \big(\frac{1}{2}|Du + D\varphi|^2 - q(u+\varphi)\big) - \int_\Omega \big(\frac{1}{2}|Du|^2 - qu\big) \\
&= \int_\Omega \big(\langle Du, D\varphi\rangle - q\varphi\big) + \int_\Omega \frac{1}{2}|D\varphi|^2 \\
&= \int_\Omega \underbrace{(-\Delta u - q)}_{=0}\varphi + \int_\Omega \frac{1}{2}|D\varphi|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Die Lösung u minimiert das Funktional also im Vergleich zu allen Variationen mit kompaktem Träger. Umgekehrt folgt aus der Minimumeigenschaft die Differentialgleichung, und zwar gilt für alle $\varphi \in C^1_c(\Omega)$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u+t\varphi)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega \big(\frac{1}{2}|Du + tD\varphi|^2 - q(u+t\varphi)\big)|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \big(\langle Du, D\varphi\rangle - q\varphi\big) \\
&= \int_\Omega (-\Delta u - q)\varphi.
\end{aligned}$$

Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt $-\Delta u = q$ wie behauptet. Allgemein geht es in der Variationsrechnung um Funktionale der Form

$$\mathcal{F} : C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R},\, \mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x,u(x),Du(x))\,dx. \tag{1.2}$$

Die Funktion $f = f(x,z,p)$ heißt Lagrangefunktion, wir nehmen stets $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$ an. In diesem Abschnitt leiten wir für Minimierer die zugehörige Differentialgleichung, die Euler-Lagrange Gleichung, her. Als zweites folgern wir eine gewisse Konvexitätsbedingung, die uns auf den Begriff der Elliptizität führt.

Zur Notation: wir schreiben x^α, $1 \leq \alpha \leq n$, für die Koordinaten im Definitionsbereich und z^i, $1 \leq i \leq m$, für die Koordinaten im Bildbereich. Eine lineare Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ identifizieren wir mit der Matrix $(p^i_\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Wir verwenden die Einstein Summationsregel, wonach über doppelt auftetende Indizes zu summieren ist.

Lemma 1.1 *Für $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ gilt*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u+t\varphi)|_{t=0} = \int_\Omega \Big(\frac{\partial f}{\partial z^i}(\ldots)\varphi^i + \frac{\partial f}{\partial p^i_\alpha}(\ldots)\partial_\alpha \varphi^i\Big),$$

wobei $(\ldots) = (x, u(x), Du(x))$.

Beweis: Differentiation unter dem Integral und Kettenregel. $\square$

Die folgende Terminologie ist dem Begriff der Richtungsableitung einer rellen Funktion nachgebildet.

Definition 1.1 (erste Variation) *Wir bezeichen*

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \int_\Omega \Big(\frac{\partial f}{\partial z^i}(\ldots)\varphi^i + \frac{\partial f}{\partial p^i_\alpha}(\ldots)\partial_\alpha \varphi^i\Big)$$

als erste Variation von $\mathcal{F}$ an der Stelle u in Richtung φ.

Satz 1.1 (Euler-Lagrange Gleichung) *Sei $f = f(x,z,p)$ Lagrangefunktion mit f und $D_p f$ in C^1 auf $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$. Für $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ sind äquivalent:*

(1) *$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$,*

(2) *Für $i = 1, \ldots, m$ gelten die Differentialgleichungen*

$$L_f[u]_i := \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big[\frac{\partial f}{\partial p^i_\alpha}(\cdot, u, Du)\Big] + \frac{\partial f}{\partial z^i}(\cdot, u, Du) = 0.$$

Beweis: Mit partieller Integration folgt

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \int_\Omega L_{f_i}[u]\varphi^i. \tag{1.3}$$

Also gilt (2) $\Rightarrow$ (1). Für (1) $\Rightarrow$ (2) wähle $\varphi = \eta e_j$ mit $\eta \in C^\infty_c(\Omega)$ und $1 \leq j \leq m$. Dann folgt

$$0 = \int_\Omega L_{f_i}[u](\eta e_j)^i = \int_\Omega L_{f_j}[u]\,\eta.$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert nun $L_f[u]_j = 0$. $\square$

Definiere für vektorwertige Funktionen $\phi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ das L^2-Skalarprodukt

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \int_\Omega \langle \phi(x), \psi(x) \rangle_{\mathbb{R}^m} \, dx.$$

Damit erhält (1.3) die Form

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \langle L_f[u], \varphi \rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)}. \tag{1.4}$$

Die Richtungsableitung auf der linken Seite wird als Skalarprodukt mit $L_f[u]$ dargestellt, also ist $L_f[u]$ formal der Gradient des Funktionals $\mathcal{F}$ an der Stelle u, bezüglich des L^2-Skalarprodukts.

Falls die Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ das Variationsintegral $\mathcal{F}$ minimiert, im Vergleich zu allen Variationen mit kompaktem Träger, so ist die erste Variation Null. Dann folgen die Euler-Lagrange Gleichungen, falls $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Zusätzlich muss aber eine notwendige Bedingung zweiter Ordnung gelten, die wir jetzt bestimmen wollen.

Lemma 1.2 (Zweite Variation) *Sei $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$. Für $u, \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ gilt*

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}(u+t\varphi)|_{t=0} = \int_\Omega \Big(A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j + 2B_{ij}^\alpha \varphi^i \partial_\alpha \varphi^j + C_{ij}\varphi^i\varphi^j \Big),$$

wobei die Koeffizienten wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{\alpha\beta}(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha^i \partial p_\beta^j}(x, u(x), Du(x)), \\ B_{ij}^{\alpha}(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial p_\alpha^j}(x, u(x), Du(x)), \\ C_{ij}(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(x, u(x), Du(x)). \end{aligned}$$

BEWEIS: Differentiation unter dem Integral und Kettenregel. $\square$

Definition 1.2 (Zweite Variation) *Die rechte Seite in Lemma 1.2 heißt zweite Variation von $\mathcal{F}$ an der Stelle u in Richtung φ. Notation: $\delta^2\mathcal{F}(u,\varphi)$.*

Satz 1.2 (Legendre-Hadamard Bedingung) *Sei $\mathcal{F}$ Variationsintegral mit Lagrangefunktion $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$. Es sei $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ lokal minimierend, genauer gelte für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$*

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u+t\varphi) \quad \text{für } |t| \text{ hinreichend klein.}$$

Mit $A_{ij}^{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha^i \partial p_\beta^j}(x, u(x), Du(x))$ gilt dann für alle $x \in \Omega$

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\xi^i\xi^j\eta_\alpha\eta_\beta \ge 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^m,\ \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Beweis: Wir beginnen mit einer Skalierung, und zwar wählen wir

$$\varphi(x) = \varrho\phi(\frac{x-x_0}{\varrho}) \qquad \text{für } x_0 \in \Omega,\ \phi \in C_c^\infty(B_1(0), \mathbb{R}^m) \text{ und } 0 < \varrho \ll 1.$$

Da u lokal minimiert, gilt $\delta^2\mathcal{F}(u,\varphi) \geq 0$ und es folgt

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq\ \int_\Omega \Big(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi^i\partial_\beta\varphi^j + 2B_{ij}^\alpha\,\varphi^i\partial_\alpha\varphi^j + C_{ij}\varphi^i\varphi^j \Big) \\
&=\ A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0)\int_\Omega \partial_\alpha\phi^i(\frac{x-x_0}{\varrho})\partial_\beta\phi^j(\frac{x-x_0}{\varrho})\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \big(A_{ij}^{\alpha\beta}(x) - A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0)\big)\partial_\alpha\phi^i(\frac{x-x_0}{\varrho})\partial_\beta\phi^j(\frac{x-x_0}{\varrho})\,dx \\
&\quad + 2\varrho\int_\Omega B_{ij}^\alpha(x)\phi^i(\frac{x-x_0}{\varrho})\partial_\alpha\phi^j(\frac{x-x_0}{\varrho})\,dx \\
&\quad + \varrho^2\int_\Omega C_{ij}(x)\phi^i(\frac{x-x_0}{\varrho})\phi^j(\frac{x-x_0}{\varrho})\,dx.
\end{aligned}$$

Substituiere $y = \frac{x-x_0}{\varrho}$, also $x = x_0 + \varrho y$, und teile durch ϱ^n. Mit $\varrho \searrow 0$ folgt

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0)\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\alpha\phi^i(y)\partial_\beta\phi^j(y)\,dy \geq 0.$$

Als nächstes wähle $\phi(y) = \zeta(y)\xi$ für $\xi \in \mathbb{R}^m$ und $\zeta \in C_c^\infty(B_1(0))$. Es ergibt sich

$$\underbrace{A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0)\xi^i\xi^j}_{=:A^{\alpha\beta}}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\alpha\zeta(y)\partial_\beta\zeta(y)\,dy \geq 0.$$

Wir behaupten nun für $\zeta \in C_c^\infty(B_1(0), \mathbb{C}^m)$

$$A^{\alpha\beta}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\alpha\zeta(y)\overline{\partial_\beta\zeta(y)}\,dy \geq 0.$$

Nach Definition der Koeffizienten in Lemma 1.2 gilt

$$A^{\alpha\beta} = A_{ij}^{\alpha\beta}\xi^i\xi^j = A_{ji}^{\beta\alpha}\xi^i\xi^j = A^{\beta\alpha}.$$

Andererseits ist mit $\zeta = u + iv$

$$\partial_\alpha\zeta\,\partial_\beta\overline{\zeta} = \partial_\alpha u\,\partial_\beta u + \partial_\alpha v\,\partial_\beta v - i(\partial_\alpha u\,\partial_\beta v - \partial_\beta u\,\partial_\alpha v).$$

Die Behauptung folgt, denn der Imaginärteil des Integrals ist Null wegen der Schiefsymmetrie, und der Realteil ist nichtnegativ wie gezeigt. Jetzt wählen wir $\zeta(y) = \gamma(y)\exp(it\langle\eta, y\rangle)$ mit $\gamma \in C_c^\infty(B_1(0))$ und $\eta \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Es ist

$$\partial_\alpha\zeta(y) = \exp(it\langle\eta, y\rangle)\big(it\eta_\alpha\gamma(y) + \partial_\alpha\gamma(y)\big).$$

Einsetzen liefert

$$A^{\alpha\beta}t^2\eta_\alpha\eta_\beta \int_{\mathbb{R}^n} \gamma^2(y)\,dy + A^{\alpha\beta}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\alpha\gamma(y)\partial_\beta\gamma(y)\,dy \geq 0.$$

Wir teilen durch $t^2\int_{\mathbb{R}^n}\gamma^2 > 0$, und erhalten mit $t \nearrow \infty$ die Ungleichung

$$0 \leq A^{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta = A^{ij}_{\alpha\beta}(x_0)\xi^i\xi^j\eta_\alpha\eta_\beta.$$

$\square$

Die Bedingung von Legendre-Hadamard ist eine Konvexitätseigenschaft. Um das zu sehen, betrachten wir ein quadratisches Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(A^{\alpha\beta}_{ij}\partial_\alpha u^i\partial_\beta u^j + C_{ij}u^iu^j\Big).$$

Die Lagrangefunktion lautet also

$$f(x,z,p) = \frac{1}{2}\big(A^{\alpha\beta}_{ij}(x)p^i_\alpha p^j_\beta + C_{ij}(x)z^iz^j\big).$$

OBdA sei $A^{ij}_{\alpha\beta} = A^{ji}_{\beta\alpha}$ und $C_{ij} = C_{ji}$. Der Euler-Lagrange Operator ist linear, er lautet

$$L_f[u]_i = -\partial_\alpha\Big(A^{\alpha\beta}_{ij}\partial_\beta u^j\Big) + C_{ij}u^j. \tag{1.6}$$

Für $q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Funktion $t \mapsto f(x,z,p+tq)$ genau dann konvex, wenn

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2}f(x,z,p+tq) = A^{\alpha\beta}_{ij}(x)q^i_\alpha q^j_\beta.$$

Sei speziell q mit Rang Eins, also $qx = \xi\langle\eta,x\rangle$ mit $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $q^i_\alpha = \xi^i\eta_\alpha$, und

$$\frac{d^2}{dt^2}f(x,z,p+tq) = A^{\alpha\beta}_{ij}(x)\xi^i\xi^j\eta_\alpha\eta_\beta.$$

Im Fall quadratischer Funktionale besagt die Legendre-Hadamard Bedingung, dass die Lagrangefunktion konvex ist in Rang-Eins Richtungen, man spricht auch von Rang-Eins Konvexität. Für eindimensionale oder skalare Variationsprobleme, also $n = 1$ oder $m = 1$, reduziert sich das auf die übliche Konvexität, weil dann sowieso $\operatorname{rang} q \leq 1$ für alle q ist.

Beispiel 1.1 Sei $\Omega = U \times (t_0,t_1)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir schreiben $(t,x) \in \Omega$ und $Du = (\partial_t u, \nabla u)$. Betrachte das quadratische Funktional, die sogenannte Wirkung,

$$\mathcal{F} : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R},\ \mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big((\partial_t u)^2 - |\nabla u|^2\big).$$

Der Euler-Lagrange Operator ist der Wellenoperator $L_f[u] = -\partial_t^2 u + \Delta u$. Die Lagrangefunktion $f(P) = \frac{1}{2}(p_0^2 - |p|^2)$, mit $P = (p_0,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, ist nicht konvex. Lösungen der Wellengleichungen sind also kritische Punkte, aber keine Minima des Wirkungsintegrals.

Unsere Diskussion motiviert die Einführung folgender Klassen für beliebige lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Definition 1.3 (Elliptizität) *Betrachte für Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, den linearen Differentialoperator*

$$(Lu)_i = A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 u^j + B_{ij}^{\alpha} \partial_\alpha u^j + C_{ij} u^j \quad (1 \leq i \leq m),$$

mit Koeffizienten $A_{ij}^{\alpha\beta}$, B_{ij}^{α}, $C_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann heißt L elliptisch (bzw. stark elliptisch) mit Konstante $\lambda > 0$, wenn für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{\alpha\beta} \xi^i \xi^j \eta_\alpha \eta_\beta &\geq \lambda |\xi|^2 |\eta|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}^n, \\ A_{ij}^{\alpha\beta} p_\alpha^i p_\beta^j &\geq \lambda |p|^2 \quad \text{für alle } p \in \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned}$$

Der Parameter $\lambda > 0$ quantifiziert die Elliptizitätsbedingung. Dies werden wir später in der Existenz- und Regularitätstheorie verwenden.

2 Hilbertraumtheorie

Die Existenztheorie für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung beruht auf folgendem abstrakten Existenzsatz aus der Funktionalanalysis. Dabei ist V ein reeller Hilbertraum, also vollständig mit der gegebenen Skalarproduktnorm

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

V' bezeichnet den Dualraum, also die Menge aller $\phi : V \to \mathbb{R}$ linear mit Norm

$$\|\phi\| = \sup\{\phi(u) : \|u\| \leq 1\} < \infty.$$

Vorweg eine Standardtatsache.

Lemma 2.1 (Darstellung von Bilinearformen) *Sei V Hilbertraum, und $B : V \times V \to \mathbb{R}$ sei stetige Bilinearform auf V, das heißt $\|B\| = \sup_{\|u\|,\|v\| \leq 1} |B(u,v)| < \infty$. Dann gibt es genau ein $T = T_B \in L(X, X)$ mit*

$$B(u,v) = \langle u, Tv \rangle \quad \text{für alle } u, v \in X,$$

und es gilt $\|T\| = \|B\|$.

Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es zu jedem $\phi \in V'$ ein $u \in V$ mit $\langle u, \cdot \rangle = \phi$. Dies wird im Satz 2.1 unten als Spezialfall $B(u,v) = \langle u, v \rangle$ bewiesen. Das Lemma folgt wiederum leicht aus dem Satz von Riesz, siehe Vorlesung Funktionalanalysis SS 2017.

Satz 2.1 (Lax-Milgram) *Sei $B : V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform auf dem Hilbertraum V mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *B ist stetig: es gibt ein $M < \infty$ mit $|B(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|$ für alle $u, v \in V$.*

(2) *B ist koerziv: es gibt ein $\mu > 0$ mit $B(u,u) \geq \mu \|u\|^2$ für alle $u \in V$.*

Dann ist der Operator $L : V \to V'$, $(Lu)(v) = B(u,v)$, invertierbar, und es gilt

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}. \tag{2.7}$$

Zusatz. *Ist B symmetrische Bilinearform, so ist die Lösung von $Lu = \phi$ die eindeutige Minimalstelle des Funktionals $Q_\phi(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - \phi(v)$.*

Beweis: Durch *Testen mit u* folgt

$$\mu \|u\|^2 \leq B(u,u) = Lu(u) \leq \|Lu\| \, \|u\| \quad \Rightarrow \quad \|u\| \leq \frac{1}{\mu}\|Lu\|.$$

Also ist L injektiv, außerdem gilt (2.7), sobald auch die Surjektivität bewiesen ist. Sei dazu erst B symmetrisch. Wir zeigen folgende Aussagen:

(a) Eine Minimalstelle u von Q_ϕ ist Lösung von $Lu = \phi$.

(b) Es gibt eine Minimalstelle u von Q_ϕ.

Zu (a): Ist u Minimalstelle von Q_ϕ, so folgt für alle $v \in V$

$$0 = \frac{d}{dt} Q_\phi(u + tv)|_{t=0} = B(u,v) - \phi(v) = (Lu - \phi)(v).$$

Zu (b): Q_ϕ ist nach unten beschränkt, genauer gilt

$$Q_\phi(u) \geq \frac{\mu}{2}\|u\|^2 - \|\phi\| \, \|u\| = \frac{\mu}{2}(\|u\| - \frac{1}{\mu}\|\phi\|)^2 - \frac{1}{2\mu}\|\phi\|^2 \geq -\frac{1}{2\mu}\|\phi\|^2.$$

Also ist $\lambda := \inf_{u \in V} Q_\phi(u) \geq -\frac{1}{2}\|\phi\|^2 > -\infty$. Sei nun $u_k \in V$ eine Minimalfolge, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2}\|u_k - u_l\|^2 &\leq \frac{1}{2} B(u_k - u_l, u_k - u_l) \\
&= B(u_k, u_k) + B(u_l, u_l) - \frac{1}{2} B(u_k + u_l, u_k + u_l) \\
&= 2\, Q_\phi(u_k) + 2\, Q_\phi(u_l) - 4\, Q_\phi(\frac{u_k + u_l}{2}) \\
&\leq 2\, Q_\phi(u_k) + 2\, Q_\phi(u_l) - 4\lambda \\
&< \varepsilon \quad \text{für } k, l \text{ hinreichend groß.}
\end{aligned}$$

Somit existiert $u = \lim_{k \to \infty} u_k$. Da Q_ϕ stetig ist, folgt $Q_\phi(u) = \lim_{k \to \infty} Q_\phi(u_k) = \lambda$.

Für B nicht notwendig symmetrisch wähle nun $T \in L(V,V)$ mit $B(u,v) = \langle u, Tv \rangle$, siehe Lemma 2.1. Dann ist $\|T\| = \|B\|$ und wir berechnen

$$\mu \|u\|^2 \leq B(u,u) = \langle u, Tu \rangle \leq \|u\| \, \|Tu\| \quad \Rightarrow \quad \|Tu\| \geq \mu \|u\|.$$

Für die symmetrische Bilinearform $A(u,v) = \langle Tu, Tv\rangle$ folgt

$$A(u,v) = \langle Tu, Tv\rangle = B(Tu,v) = LTu(v).$$

Nun ist A stetig und koerziv, genauer gilt

$$|A(u,v)| \leq \|T\|^2 \|u\|\,\|v\| \quad \text{und} \quad A(u,u) = \|Tu\|^2 \geq \mu^2 \|u\|^2.$$

Wie oben gezeigt ist LT und damit auch L surjektiv. □

Der für die elliptische Theorie relevante Hilbertraum ist der Raum $W^{1,2}$ der Funktionen mit schwacher Aleitung in L^2. Wir geben hier die Definition und diskutieren die lokale Approximation durch C^∞-Funktionen mittels Glättung.

Definition 2.1 (schwache Ableitung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Eine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ heißt schwache Ableitung von $u(x)$ nach der Variablen x^α, falls gilt:*

$$\int_\Omega \langle u, \partial_\alpha \varphi\rangle = -\int_\Omega \langle g, \varphi\rangle \quad \textit{für alle } \varphi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Notation: $\partial_\alpha u = g$ *schwach.*

Dazu zwei Bemerkungen:

(1) *Eindeutigkeit:* Die schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt, falls existent. Denn ist die Definition für g_1 und g_2 erfüllt, so folgt

$$\int_\Omega \langle g_1 - g_2, \varphi\rangle = -\int_\Omega \langle u \partial_\alpha \varphi\rangle + \int_\Omega \langle u, \partial_\alpha \varphi\rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt $g_1 = g_2$. Ist $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so ist u auch schwach differenzierbar, die schwachen Ableitungen $\partial_\alpha u$ sind die klassischen Ableitungen.

(2) *Linearität:* Sind $u, v \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ schwach nach x^α differenzierbar, so auch $\lambda u + \mu v$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; und zwar gilt $\partial_\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda \partial_\alpha u + \mu \partial_\alpha v$. Denn wir berechnen für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle \alpha u + \beta v, \partial_i \varphi\rangle &= \alpha \int_\Omega \langle u, \partial_i \varphi\rangle + \beta \int_\Omega \langle v, \partial_i \varphi\rangle \\
&= -\alpha \int_\Omega \langle \partial_i u, \varphi\rangle - \beta \int_\Omega \langle \partial_i v, \varphi\rangle \\
&= -\int_\Omega \langle \alpha \partial_i u + \beta \partial_i v, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.1 Wir geben ein Beispiel einer schwach, aber nicht klassisch differenzierbaren Funktion, und zwar betrachten wir für $p \in \mathbb{R}$

$$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),\ u(x) = \begin{cases} |x|^p & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche $p \in \mathbb{R}$ hat $u(x)$ schwache Ableitungen auf $\mathbb{R}^n$? Auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist $u(x)$ glatt, die schwache Ableitung muss dort die klassische sein:

$$\partial_\alpha u(x) = p|x|^{p-1} \frac{x_\alpha}{|x|} =: g_\alpha(x) \qquad \text{für } x \neq 0.$$

Damit ist die schwache Ableitung schon fast überall bestimmt. Für $p > 1-n$ sind die g_α auf $\mathbb{R}^n$ lokal integrierbar. Wir vermuten daher, dass $u(x)$ genau für $p > 1-n$ schwach differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^n$. Sei dazu $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u\, \partial_\alpha \varphi &= \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\varrho(0)} (\partial_\alpha(u\varphi) - (\partial_\alpha u)\varphi) \\
&= \lim_{\varrho \searrow 0} \Big(\underbrace{- \int_{\partial B_\varrho(0)} u\varphi \langle e_\alpha, \nu \rangle \, d\mu}_{\leq C\varrho^{n-1+p}} - \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\varrho(0)} g_\alpha \varphi \Big) \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} g_\alpha \varphi.
\end{aligned}$$

Also gilt tatsächlich $\partial_\alpha u = g_\alpha$ schwach für $p > 1-n$.

Definition 2.2 (Sobolevräume) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Wir definieren*

$$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) : \partial_\alpha u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ für } \alpha = 1, \ldots, n\},$$

mit der zugehörigen $W^{1,p}$-Norm

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^n \|\partial_\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Analog werden auch die lokalen Sobolevräume $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ erklärt.

Satz 2.2 *$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist ein Banachraum.*

Beweis: Ist u_k Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so sind u_k sowie $\partial_\alpha u_k$ Cauchyfolgen in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Nach Fischer-Riesz gilt dann $u_k \to u$, $\partial_\alpha u_k \to g_\alpha$ in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ folgt

$$\int_\Omega \langle u, \partial_\alpha \varphi \rangle = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \langle u_k, \partial_\alpha \varphi \rangle = - \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \langle \partial_\alpha u_k, \varphi \rangle = \int_\Omega \langle g_\alpha, \varphi \rangle.$$

Also gilt $\partial_\alpha u = g_\alpha$ schwach, $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. $\square$

Es ist eine wichtige Tatsache, dass Sobolevfunktionen im Fall $p < \infty$ durch glatte Funktionen approximiert werden können. Wir erinnern kurz an das Verfahren der Glättung. Fixiere einen Glättungskern $\eta \in C_c^\infty(B_1(0))$, $\eta \geq 0$, mit $\int \eta(x)\, dx = 1$. Reskaliere mit $\eta^\varrho(x) = \varrho^{-n} \eta(\frac{x}{\varrho})$, und definiere für $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$

$$(\eta^\varrho * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varrho(x-y) u(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) u(x - \varrho z)\, dz \qquad \text{für } x \in \Omega_\varrho.$$

Dabei ist $\Omega_\varrho = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \backslash \Omega\} > \varrho$. Wir haben die Abschätzung

$$|(\eta_\varrho * u)(x) - u(x)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z)(u(x - \varrho z) - u(x))\, dz \Big| \leq \sup_{|y-x| \leq \varrho} |u(y) - u(x)|.$$

Ist $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$, also gleichmäßig stetig auf kompakten Teilmengen, so folgt $\eta_\varrho * u \to u$ lokal gleichmäßig in Ω. Nun können Funktionen $u \in L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ lokal durch stetige Funktionen in L^p approximiert werden, siehe Satz 6.10 im Skript Analysis 3, WS 16/17. Also folgt $\eta^\varrho * u \to u$ lokal in L^p, i.e. auf kompakten Teilmengen von Ω.

Lemma 2.2 (Glättung von Sobolevfunktionen) *Für $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt:*

(1) $\partial_\alpha(\eta^\varrho * u) = \eta^\varrho * \partial_\alpha u$ *auf* Ω_ϱ *(links steht die klassische Ableitung).*

(2) *Für $p < \infty$ gilt $\eta_\varrho * u \to u$ lokal auf Ω in $W^{1,p}$.*

Beweis: (2) folgt aus (1) wegen der L^p_{loc}-Konvergenz, siehe oben. Für (1) berechne

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha(\eta^\varrho * u)(x) &= \int \Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \eta^\varrho(x-y)\Big) u(y)\, dy \\
&= -\int \Big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \eta^\varrho(x-y)\Big) u(y)\, dy \quad \text{(Kettenregel)} \\
&= \int \eta^\varrho(x-y) \partial_\alpha u(y)\, dy \quad \text{(Definition schwache Ableitung)} \\
&= (\eta^\varrho * \partial_\alpha u)(x).
\end{aligned}$$

□

Als nächstes zeigen wir eine (nicht optimale) Version der Produktregel.

Satz 2.3 (Sobolev-Produktregel) *Seien $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $uv \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und es gilt die Produktregel*

$$\partial_\alpha(uv) = (\partial_\alpha u)v + u(\partial_\beta \eta).$$

Beweis: Sei zunächst $v \in C^\infty(\Omega)$, dann folgt für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ beliebig

$$\int_\Omega uv\, \partial_\alpha \varphi = \int_\Omega u\, \partial_\alpha(v\varphi) - \int_\Omega u(\partial_\alpha v)\varphi = -\int_\Omega \big((\partial_\alpha u)v + u(\partial_\alpha v)\big)\varphi.$$

Sei nun $v \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $q < \infty$. Wähle $v_k \in C^\infty(\Omega)$ mit $v_k \to v$ lokal in $W^{1,q}$ auf Ω, siehe Lemma 2.2. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega uv\, \partial_\alpha \varphi &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega uv_k\, \partial_\alpha \varphi \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \big((\partial_\alpha u)v_k + u(\partial_\alpha v_k)\big)\varphi \\
&= -\int_\Omega \big((\partial_\alpha u)v + u(\partial_\alpha v)\big)\varphi.
\end{aligned}$$

Da u, v vertauscht werden können, sind alle Fälle gezeigt. □

Satz 2.4 (Transformationsregel) *Sei $v \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(V,\mathbb{R}^m)$ und $\phi \in C^1(U,V)$ diffeomorph. Dann folgt $u = v \circ \phi \in W^{1,1}_[\mathrm{loc}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ und es gilt die Kettenregel*

$$D(u \circ \phi) = (Du) \circ \phi \, D\phi. \tag{2.8}$$

Beweis: Sei $\eta \in C^\infty_c(U)$, und $v_\varrho : V_\varrho \to \mathbb{R}^m$ bezeichne die Glättung. Es gilt $\phi(\operatorname{spt}\eta) \subset\subset V$, also folgt für $\varrho > 0$ hinreichend klein durch partielle Integration

$$\int_U (v_\varrho \circ \phi)\, \partial_\alpha \eta = -\int_U \big((Dv_\varrho) \circ \phi \, \partial_\alpha \phi\big)\, \eta.$$

Setze $\psi = \phi^{-1} \in C^1(V,U)$. Aus dem Transformationssatz folgt für $\varrho \to 0$

$$\Big| \int_U (v_\varrho \circ \phi - v \circ \phi)\, \partial_\alpha \eta \Big| \leq \int_{\phi(\operatorname{spt}\eta)} |v_\varrho - v| \, \underbrace{|(\partial_\alpha \eta) \circ \psi| \, |\det D\psi|}_{\leq C} \to 0.$$

Weiter schätzen wir ab

$$\Big| \int_U \big((Dv_\varrho)\circ\phi - (Dv)\circ\phi\big)\, (\partial_\alpha \phi)\, \eta \Big| \leq \int_{\phi(\operatorname{spt}\eta)} |Dv_\varrho - Dv| \, \underbrace{|(\partial_\alpha \phi) \circ \psi| \, |\eta \circ \psi| \, |\det D\psi|}_{\leq C} \to 0.$$

Somit folgt die Behauptung. □

Im folgenden Lemma sammeln wir einfache Tatsachen zu Differenzenquotienten.

Lemma 2.3 (Approximation mit Differenzenquotienten) *Seien $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^m)$. Definiere für $1 \leq \alpha \leq n$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \varrho$ die Funktionen*

$$\Delta^h_\alpha u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_\varrho), \qquad \Delta^h_\alpha u(x) = \frac{u(x + he_\alpha) - u(x)}{h} \quad (h \neq 0).$$

Es gelten die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned}
\Delta^h_\alpha (uv) &= (\Delta^h_\alpha u)\, v + u(\,\cdot\, + he_\alpha)\, \Delta^h_\alpha v, && (2.9)\\
\int (\Delta^h_\alpha u)\, v &= -\int u\, (\Delta^{-h}_\alpha v) \quad \textit{falls } \operatorname{spt}(uv) \subset\subset \Omega_\varrho && (2.10)\\
\Delta^h_\alpha\, \partial_\beta u &= \partial_\beta\, \Delta^h_\alpha u \quad \textit{für } u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^m), && (2.11)\\
\|\Delta^h_\alpha u\|_{L^p(\Omega_\varrho)} &\leq \|\partial_\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{für } 1 \leq p \leq \infty. && (2.12)
\end{aligned}$$

Beweis: (2.9) ergibt sich durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\Delta^h_\alpha (uv)(x) &= \frac{u(x+he_\alpha)v(x+he_\alpha) - u(x)v(x)}{h}\\
&= \frac{u(x+he_\alpha) - u(x)}{h} v(x) + u(x+he_\alpha)\frac{v(x+he_\alpha) - v(x)}{h}\\
&= (\Delta^h_\alpha u)(x) v(x) + u(x+he_\alpha)\, (\Delta^h_\alpha v)(x).
\end{aligned}$$

Auch (2.10) ist eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int (\Delta_\alpha^h u)\, v &= \frac{1}{h}\Big(\int u(x+he_\alpha)v(x)\,dx - \int u(x)v(x)\,dx\Big)\\
&= \frac{1}{h}\Big(\int u(y)v(x-he_\alpha)\,dx - \int u(y)v(y)\,dy\Big)\\
&= \int u\,(\Delta_\alpha^{-h} v).
\end{aligned}$$

Weiter berechnen wir für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\varrho)$

$$\begin{aligned}
\int (\Delta_\alpha^h u)\partial_\beta \varphi &= -\int u\,\Delta_\alpha^{-h}\partial_\beta\varphi \qquad \text{(nach (2.10))}\\
&= -\int u\,\partial_\beta \Delta_\alpha^{-h}\varphi\\
&= \int \partial_\beta u\,\Delta_\alpha^{-h}\varphi \qquad \text{(Definition schwache Ableitung)}\\
&= -\int \Delta_\alpha^h(\partial_\beta u)\,\varphi \qquad \text{(nach (2.10))}.
\end{aligned}$$

Jetzt zu (2.12), erst für $1 \leq p < \infty$. Für $K \subset \Omega_\varrho$ kompakt und $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_K |\Delta_\alpha^h u(x)|^p\,dx &= \int_K |h|^{-p}\Big|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+the_\alpha)\,dt\Big|^p\,dx\\
&\leq \int_K\int_0^1 |\partial_\alpha u(x+the_\alpha)|^p\,dtdx\\
&\leq \int_{\{\mathrm{dist}\,(y,K)\leq\varrho\}} |\partial_\alpha u(y)|^p\,dy.
\end{aligned}$$

Durch Approximation folgt die Abschätzung auch für $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Jetzt schätze rechts durch das Integral auf Ω ab und schöpfe links Ω_ϱ durch kompakte Mengen aus. Der Fall $p = \infty$ folgt schließlich durch Grenzübergang $p \nearrow \infty$. $\square$

Das folgende Resultat wird in der Regularitätstheorie benutzt.

Satz 2.5 *Sei $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ für $1 < p \leq \infty$ und $1 \leq \alpha \leq n$. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit*

$$C(\Omega') := \liminf_{h\to 0} \|\Delta_\alpha^h u\|_{L^p(\Omega')} < \infty.$$

Dann existiert die schwache Ableitung $\partial_\alpha u \in L^p(\Omega', \mathbb{R}^m)$, und genauer gilt

$$\|\partial_\alpha u\|_{L^p(\Omega')} \leq C(\Omega').$$

Beweis: Nach Kompaktheitssätzen aus der Funktionalanalysis, siehe Satz 7.6 und Satz 7.7 im Skript vom SS 2017, gilt für jede Folge $h_k \to 0$, $h_k \neq 0$, nach Wahl einer Teilfolge

$$\Delta_\alpha^{h_k} u \to g \begin{cases} \text{schwach in } L^p(\Omega') & \text{für } 1 < p < \infty,\\ \text{schwach}* \text{ in } L^\infty(\Omega') & \text{für } p = \infty.\end{cases}$$

Für eine Testfunktion $\eta \in C^\infty_c(\Omega')$ folgt

$$\int_\Omega u\,\partial_\alpha \eta = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u\,(\Delta_\alpha^{-h_k}\eta) = -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega (\Delta_\alpha^{h_k} u)\,\eta = -\int_\Omega g\,\eta,$$

Somit ist $\partial_\alpha u = g \in L^p(\Omega', \mathbb{R}^m)$. Weiter ist die Norm unterhalbstetig bei schwacher bzw. schwach$*$ Konvergenz, siehe Satz 7.2(3) des FA-Skripts. Das bedeutet

$$\|\partial_\alpha u\|_{L^p(\Omega')} \leq \liminf_{k\to\infty} \|\Delta_\alpha^{h_k} u\|_{L^p(\Omega')} \leq C(\Omega').$$

□

Folgerung 2.1 ($W^{1,\infty}$/Lipschitz) *Für $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Ist u lokal Lipschitzstetig, so folgt $u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, und für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt*

$$\max_{1\leq\alpha\leq n} \|\partial_\alpha u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \mathrm{Lip}(u, \Omega').$$

(2) *Ist $u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so gilt nach Abänderung in einer Nullmenge*

$$\mathrm{Lip}(u, \Omega') \leq C \max_{1\leq\alpha\leq n} \|\partial_\alpha u\|_{L^\infty(\Omega')} \qquad \text{für alle } \Omega' \subset\subset \Omega,$$

mit einer Konstanten $C = C(\Omega, \Omega')$.

Beweis: Zu (1): für $\Omega'' \subset\subset \Omega'$ gilt $\limsup_{h\to 0} \|\Delta_\alpha^h u\|_{L^\infty(\Omega'')} \leq \mathrm{Lip}(u, \Omega') < \infty$. Aus Satz 2.5 folgt $u \in W^{1,\infty}(\Omega'')$ und $\|\partial_\alpha u\|_{L^\infty(\Omega'')} \leq \mathrm{Lip}(u, \Omega')$. Jetzt Ausschöpfung mit $\Omega'' \subset \Omega'$.

Zu (2): sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ gegeben. Setze $d = \mathrm{dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$ und $\Omega'' = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}\,(x, \Omega') < d/2\}$. Dann ist $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ und für $\varrho < d/2$ folgt

$$\|D(\eta_\varrho * u)\|_{C^0(\Omega')} = \|(\eta_\varrho * Du)\|_{C^0(\Omega')} \leq \|Du\|_{L^\infty(\Omega'')}.$$

Daraus folgt $\mathrm{Lip}(\eta_\varrho * u, \Omega') \leq C = C(\Omega, \Omega')$, siehe Analysis 2 (2016), Folgerung 19.1 zum Schrankensatz. Mit $\varrho \searrow 0$ konvergiert $\eta_\varrho * u$ gegen den gesuchten Repräsentanten auf Ω'. □

Definition 2.3 (verallgemeinerte Nullrandwerte) *Wir bezeichnen den Abschluss von $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ im Raum $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $W^{1,p}_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

3 Innere L^2 a priori Abschätzungen

Hier behandeln wir die L^2 Regularitätstheorie und a priori Abschätzungen für elliptische Systeme in Divergenzgestalt. Wir betrachten erst einen stark elliptischen Operator L auf einer offenen und beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Genauer ist für $1 \leq j \leq m$

$$(Lu)_j = -\partial_\beta(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i) - \partial_\beta(B_{ij}^\beta u^i) + C_{ij}u^i. \tag{3.13}$$

Wir stellen folgende Voraussetzungen:

Beschränktheit der Koeffizienten:

$$\|A_{ij}^{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|B_{ij}^\beta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|C_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \quad \text{für alle } \alpha, \beta, i, j. \tag{3.14}$$

Starke Elliptizitätsbedingung mit Konstante $\lambda > 0$:

$$A_{ij}^{\alpha\beta}\xi_\alpha^i\xi_\beta^j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{3.15}$$

Um den Operator schwach zu definieren, führen wir den Raum der Funktionen mit sogenannten verallgemeinerten Randwerten Null ein, und zwar bezeichnet $W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ den Abschluss des Raums $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ bezüglich der $W^{1,2}$-Norm.

Lemma 3.1 (schwach definierter Operator) *Unter obigen Voraussetzungen haben wir den wohldefinierten, stetigen Operator*

$$L : W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m) \to W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)',\ Lu(\phi) = B(u,\phi),$$

wobei sich $B(u,\phi)$ durch formale partielle Integration ergibt, i.e.

$$B(u,\phi) = \int_\Omega \Big(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i\partial_\beta\phi^j + B_{ij}^\beta u^i\partial_\beta\phi^j + C_{ij}u^i\phi^j\Big).$$

Die Stetigkeit des Operators L folgt aus der Beschränktheit der Koeffizienten und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, genauer gilt

$$\|L\| \leq CM. \tag{3.16}$$

Eine Funktion $u \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ mit $Lu = \phi$ in $W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)'$ wird auch als schwache Lösung der Gleichung bezeichnet. Als erstes leiten wir nun eine lokale Abschätzung her. Wir verwenden die übliche Notation $W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)' =: W^{-1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

Satz 3.1 (lokale $W^{1,2}$-Abschätzung) *Für $B_{2R} \subset \Omega$ gilt mit $C = C(n,\lambda,M,R) < \infty$*

$$\|Du\|_{L^2(B_R)} \leq C\big(\|Lu\|_{W^{-1,2}(B_{2R})} + \|u\|_{L^2(B_{2R})}\big). \tag{3.17}$$

Beweis: Sei zunächst $\lambda = 1$. Sei $\eta \in C_c^\infty(B_{2R})$ eine Abschneidefunktion mit

$$\eta \equiv 1 \text{ auf } B_R \quad \text{ und } \quad |D\eta| \leq C/R.$$

Wir wählen als Testfunktion in der Gleichung $\phi = \eta^2 u$:

$$B(u, \eta^2 u) = Lu(\eta^2 u). \tag{3.18}$$

Nun wird wie folgt abgeschätzt, wobei mehrfach die Peter-Paul-Ungleichung benutzt wird (*Peter robs Mary from Paul*):

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \quad \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

In der ersten Abschätzung verwenden wir die Elliptitzität.

$$\begin{aligned} A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha u^i \partial_\beta (\eta^2 u^j) &= \eta^2 A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha u^i \partial_\beta u^j - A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha u^i 2\eta (\partial_\beta \eta)\, u^j \\ &\geq \eta^2 |Du|^2 - \varepsilon \eta^2 |Du|^2 - \frac{CM^2}{\varepsilon} |D\eta|^2 |u|^2. \end{aligned}$$

Die restlichen Terme werden jetzt einfach nach oben abgeschätzt.

$$\begin{aligned} B_{ij}^\beta u^i \partial_\beta (\eta^2 u^j) &= \eta^2 B_{ij}^\beta u^i \partial_\beta u^j + B_{ij}^\beta u^i u^j \, 2\eta\, \partial_\beta \eta \\ &\leq \varepsilon \eta^2 |Du|^2 + \frac{CM^2}{\varepsilon} \eta^2 |u|^2 + C|D\eta|^2 |u|^2 \\ C_{ij} u^i (\eta^2 u)^j &\leq CM \eta^2 |u|^2. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite verwende $0 \leq \eta \leq 1$, um wie folgt abzuschätzen:

$$\|D(\eta^2 u)\|_{L^2} \leq \|\eta \, Du\|_{L^2} + C \|(D\eta)\, u\|_{L^2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |Lu(\eta^2 u)| &\leq \|Lu\|_{W^{-1,2}} \|\eta^2 u\|_{W^{1,2}} \\ &\leq \|Lu\|_{W^{-1,2}} \big(\|\eta u\|_{L^2} + \|\eta Du\|_{L^2} + \|(D\eta) u\|_{L^2} \big) \\ &\leq \varepsilon \int \eta^2 |Du|^2 + C \int \eta^2 |u|^2 + C \int |D\eta|^2 |u|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|Lu\|_{W^{-1,2}}^2. \end{aligned}$$

Wähle nun $\varepsilon = \frac{1}{6}$ und kombiniere die Abschätzungen. Es folgt

$$\int \eta^2 |Du|^2 \leq C \Big(\|Lu\|_{W^{-1,2}}^2 + M^2 \int |D\eta|^2 |u|^2 + M^2 \int \eta^2 |u|^2 \Big).$$

Sei jetzt $\lambda > 0$ beliebig. Wende die Abschätzung an auf den Operator $\frac{1}{\lambda} L$, wobei M durch M/λ zu ersetzen ist. Dann ergibt sich mit $C = C(n, \lambda, M, R) < \infty$

$$\|Du\|_{L^2(B_R)} \leq C \left(\|Lu\|_{W^{-1,2}(B_{2R})} + \|u\|_{L^2(B_{2R})} \right).$$

$\square$

Bemerkung 3.1 Sei L mit (3.14) und (3.15), auf einer offenen und beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann folgt mit $\Omega_R = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > R\}$

$$\|Du\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C\left(|Lu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \quad \text{mit } C = C(n, \lambda, M, \Omega, R). \tag{3.19}$$

Dazu überdecken wir $\overline{\Omega}_R$ durch Bälle $B_{\frac{R}{2}}(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$, mit $x_i \in \overline{\Omega}_R$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|Du\|_{L^2(\Omega_R)} &\leq \sum_{i=1}^{N} \|Du\|_{B_{\frac{R}{2}}(x_i)} \\
&\leq C \sum_{i=1}^{N} \left(\|Lu\|_{W^{-1,2}(B_R(x_i))} + \|u\|_{L^2(B_R(x_i))}\right) \\
&\leq CN\left(\|Lu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Satz 3.2 (innere L^2-Abschätzungen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte auf Ω den Operator*

$$(Lu)_j = -\partial_\beta(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i) - \partial_\beta(B_{ij}^{\beta}u^i) + C_{ij}u^i, \quad 1 \leq j \leq m.$$

L sei stark elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$, und es gelte für ein $k \in \mathbb{N}_0$

$$\|A_{ij}^{\alpha\beta}\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)} + \|B_{ij}^{\alpha}\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)} + \|C_{ij}\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} \leq M_k < \infty. \tag{3.20}$$

Sei $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ Lösung der Gleichung $Lu = \phi$ mit rechter Seite $\phi \in W^{k,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Für jedes $R > 0$ ist dann $u|_{\Omega_R}$ in $W^{k+2,2}(\Omega_R, \mathbb{R}^m)$, und es gilt mit $C_k = C_k(\lambda, M_k, \Omega, R)$

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega_R)} \leq C_k\left(\|\phi\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.21}$$

Die Differentialgleichung besagt, dass das Funktional $Lu \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ durch Multiplikation mit der Funktion $\phi \in W^{k,2}(\Omega)$ gegeben ist, und damit regulärer ist als a priori gegeben. Es wird behauptet, dass die Lösung u bei passender Qualität der Koeffizienten entsprechend regulärer ist. Die Beweisidee beruht auf dem Durchdifferenzieren der Gleichung. Im Fall der Poissongleichung $-\Delta u = f$ ergibt sich formal

$$\partial_\alpha f = -\partial_\alpha(\Delta u) = -\Delta(\partial_\alpha u).$$

Mit Lemma 3.17 würde eine $W^{1,2}$-Abschätzung für $\partial_\alpha u$ folgen, damit eine L^2-Abschätzung für die zweiten Ableitungen D^2u. Allerdings ist dieses Argument nur formal, da es ja die Existenz der zweiten Ableitungen schon benutzt. Um das zu umgehen, verwenden wir Differenzenquotienten. Außerdem ergeben sich für einen allgemeinen Operator diverse Zusatzterme bei Anwendung der Produktregel.

Für den Beweis brauchen wir Differenzenquotient und schwache Ableitung eines Funktionals $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$. Für $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ definieren wir

$$\Delta_\alpha^h\phi(\eta) = -\phi(\Delta_\alpha^{-h}\eta), \quad \text{falls } \operatorname{spt}\eta \subset\subset \Omega_\varrho \quad \text{und } |h| < \varrho, \tag{3.22}$$

$$(\partial_\alpha\phi)(\eta) = -\phi(\partial_\alpha\eta). \tag{3.23}$$

Diese Definitionen sind konsistent mit den klassischen: ist ϕ durch Integration gegen eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ gegeben, so gilt

$$\Delta_\alpha^h \phi(\eta) = -\phi(\Delta_\alpha^{-h}\eta) = -\int f\, \Delta_\alpha^{-h}\eta = \int (\Delta_\alpha^h f)\, \eta.$$

Analog gilt, hier wenn $f \in W^{1,2}(\Omega)$,

$$\partial_\alpha \phi(\eta) = -\phi(\partial_\alpha \eta) = -\int f\, \partial_\alpha \eta = \int (\partial_\alpha f)\, \eta.$$

Das Funktional $\Delta_\alpha^h \phi$ ist stetig bezüglich der $W^{1,2}$-Norm, und damit stetig fortsetzbar auf $W_0^{1,2}(\Omega_\varrho)$. Dagegen ist das Funktional $\partial_\alpha \phi$ im allgemeinen nicht stetig bezüglich der $W^{1,2}$-Norm. Der Differenzenquotient vertauscht mit der schwachen Ableitung, genauer gilt für $v \in L^2(\Omega)$ und $\eta \in C_c^\infty(\Omega_\varrho)$ mit $|h| < \varrho$

$$(\Delta_\alpha^h \partial_\beta v)(\eta) = \int v\, \partial_\beta \Delta_\alpha^{-h}\eta = \int v\, \Delta_\alpha^{-h}\partial_\beta \eta = \partial_\beta \Delta_\alpha^h v(\eta).$$

Wir zeigen jetzt Satz 3.2.

Beweis: Wir verwenden Induktion über $k \geq -1$. Für $k = -1$ sei M_{-1} mit

$$\|A_{ij}^{\alpha\beta}\|_{L^\infty} + \|B_{ij}^\beta\|_{L^\infty} + \|C_{ij}\|_{L^\infty} \leq M_{-1} < \infty.$$

Die Abschätzung (3.21) für $k = -1$ gilt dann nach Satz 3.1 bzw. Bemerkung 3.1. Weiter reicht es aufgrund des Überdeckungsarguments, im Induktionsschritt von $k-1$ auf $k \in \mathbb{N}_0$ den Fall $\Omega = B_{2R}$ für gegebenes $R > 0$ zu behandeln. Wir wenden nun $\Delta^h := \Delta_\gamma^h$ auf die schwache Gleichung an, dies ergibt

$$\Delta^h(Lu) = \Delta^h \phi, \qquad \text{auf } B_{2R-\varrho} \text{ für } |h| < \varrho.$$

Wir berechnen mit der Produktregel für Δ^h, wobei $u_h(x) := u(x + he_\gamma)$,

$$\begin{aligned}
\Delta^h \partial_\beta\big(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i + B_{ij}^\beta u^i\big) &= \partial_\beta \Delta^h\big(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i + B_{ij}^\beta u^i\big)\\
&= \partial_\beta\big(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\Delta^h u^i) + (\Delta^h A_{ij}^{\alpha\beta})\,\partial_\alpha u_h^i + B_{ij}^\beta\,\Delta^h u^i + (\Delta^h B_{ij}^\beta)\,u_h^i\big).
\end{aligned}$$

Also erfüllt $\Delta^h u$ auf $B_{2R-\varrho}$, $|h| < \varrho$, die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
-\partial_\beta\big(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\Delta^h u^i) - \partial_\beta\big(B_{ij}^\beta\,\Delta^h u^i\big) &= \partial_\beta\big((\Delta^h A_{ij}^{\alpha\beta})\,\partial_\alpha u_h^i\big) + \partial_\beta\big((\Delta^h B_{ij}^\beta)\,u_h^i\big)\\
&\quad + \Delta^h(\phi^i - C_{ij}u^i).
\end{aligned}$$

Für den Induktionsschritt ist die rechte Seite in $W^{k-1,2}$ abzuschätzen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\partial_\beta\big((\Delta^h A_{ij}^{\alpha\beta})\partial_\alpha u_h^i\big)\|_{W^{k-1,2}(B_{2R-2\varrho})} &\leq \|(\Delta^h A_{ij}^{\alpha\beta})\,\partial_\alpha u_h^i\|_{W^{k,2}(B_{2R-2\varrho})}\\
&\leq CM_k\,\|u\|_{W^{k+1,2}(B_{2R-\varrho})},\\
\|\partial_\beta\big((\Delta^h B_{ij}^\beta)\,u_h^i\big)\|_{W^{k-1,2}(B_{2R-2\varrho})} &\leq \|(\Delta^h B_{ij}^\beta)\,u_h^i\|_{W^{k,2}(B_{2R-2\varrho})}\\
&\leq CM_k\,\|u\|_{W^{k,2}(B_{2R-\varrho})},\\
\|\Delta^h(\phi^i - C_{ij}u^i)\|_{W^{k-1,2}(B_{2R-2\varrho})} &\leq \|\phi^i - C_{ij}u^i\|_{W^{k,2}(B_{2R-\varrho})}\\
&\leq \|\phi\|_{W^{k,2}(B_{2R-\varrho})} + CM_k\|u\|_{W^{k,2}(B_{2R-\varrho})}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir (2.12) benutzt. Aus der Induktionsannahme folgt für die rechte Seite

$$\|\Delta^h(\phi^i - C_{ij}u^i)\|_{W^{k-1,2}(B_{2R-2\varrho})} \leq C\big(\|\phi\|_{W^{k,2}(B_{2R-\varrho})} + \|u\|_{L^2(B_{2R})}\big).$$

Die Koeffizienten des Operators auf der linken Seite sind klarerweise in $W^{k,\infty}$ durch die Konstante M_k abgeschätzt. Damit folgt nun aus der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\|\Delta^h u\|_{W^{k+1,2}(B_{2R-2\varrho})} &\leq C\big(\|\phi\|_{W^{k,2}(B_{2R})} + \|u\|_{L^2(B_{2R})} + \|\Delta^h u\|_{L^2(B_{2R-\varrho})}\big)\\ &\leq C\big(\|\phi\|_{W^{k,2}(B_{2R})} + \|u\|_{L^2(B_{2R})}\big).\end{aligned}$$

Dabei wurde am Schluss nochmal (2.12) und der Induktionsanfang $k = -1$ benutzt. Wir wählen nun $\varrho = \frac{R}{2}$. Mit $h \to 0$ folgt die $W^{k+2,2}$-Regularität auf B_R und die gewünschte Abschätzung mit Satz 2.5. □

Es stellt sich die Frage, ob die L^2-Regularitätstheorie auch unter der schwächeren Voraussetzung der Elliptizität gilt.

Satz 3.3 (Gardingsche Ungleichung) *Betrachte auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt*

$$B(u,\phi) = \int_\Omega \Big(A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i \partial_\beta \phi^j + B_{ij}^\beta u^i \partial_\beta \phi^j + C_{ij}u^i\phi^j\Big),$$

mit folgenden Voraussetzungen an die Koeffizienten:

Elliptizität: *Für alle $x \in \Omega$ gilt $A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\xi^i\xi^j\eta_\alpha\eta_\beta \geq \lambda|\xi|^2|\eta|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}^n$.*

Stetigkeit: *Für alle α, β, i, j gilt $A_{ij}^{\alpha\beta} \in C^0(\overline{\Omega})$.*

Beschränktheit: *Für alle α, i, j gilt $\|B_{ij}^\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} + \|C_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M < \infty$.*

Dann gibt es eine Konstante $C < \infty$, die von n, λ, M und von der Oszillationsfunktion von $A_{ij}^{\alpha\beta}$ abhängt, so dass gilt:

$$B(\varphi,\varphi) \geq \frac{\lambda}{4}\int_\Omega |D\varphi|^2 - C\int_\Omega |\varphi|^2 \quad \textit{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

Bemerkung 3.2 Die Matrizen $\xi \otimes \eta$, also $(\xi \otimes \eta)_\alpha^i = \xi^i\eta_\alpha$, sind genau die Matrizen vom Rang Eins. Deshalb ist die Elliptizitätsbedingung gleichbedeutend mit

$$A_{ij}^{\alpha\beta}\zeta_\alpha^i\zeta_\beta^j \geq \lambda|\zeta|^2 \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}, \operatorname{rang}(\zeta) = 1.$$

Die Aussage des Satzes ist überraschend, weil $D\varphi$ nicht notwendig Rang Eins hat. Die Voraussetzung der Stetigkeit der $A_{ij}^{\alpha\beta}$ kann nicht ersatzlos gestrichen werden, wie Beispiele zeigen.

Beweis: *Schritt 1.* Sei $A_{ij}^{\alpha\beta}$ konstant und $B_{ij}^\alpha = C_{ij} = 0$. Wir zeigen

$$B(\varphi,\varphi) \geq \lambda\int |D\varphi|^2 \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

Wir können $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ annehmen. Die Idee ist nun, die Fouriertransformation zu verwenden. Betrachte

$$\widehat{\varphi}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle p, x\rangle}\, dx \quad (p \in \mathbb{R}^n).$$

Durch partielle Integration sieht man

$$\widehat{\partial_\alpha \varphi}(p) = i p_\alpha \widehat{\varphi}(p).$$

Jetzt berechnen wir mit der Parsevalschen Gleichung, also der Isometrie der Fouriertransformation, wenn φ durch Null fortgesetzt wird,

$$\begin{aligned}
B(\varphi, \varphi) &= A_{kl}^{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\alpha \varphi^k(x) \partial_\beta \varphi^l(x)\, dx \\
&= A_{kl}^{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\partial_\alpha \varphi^k}(p) \overline{\widehat{\partial_\beta \varphi^l}(p)}\, dp \\
&= A_{kl}^{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha p_\beta\, \widehat{\varphi^k}(p)\, \overline{\widehat{\varphi^l}(p)}\, dp \\
&= A_{kl}^{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha p_\beta \big(u^k(p) + i v^k(p)\big) \overline{\big(u^l(p) - i v^l(p)\big)}\, dp \quad (\widehat{\varphi} =: u + iv) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} A_{kl}^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \big(u^k(p) u^l(p) + v^k(p) v^l(p)\big)\, dp \qquad \text{(rechte Seite ist in } \mathbb{R}) \\
&\geq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |p|^2 \big(|u(p)|^2 + |v(p)|^2\big)\, dp \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial_\alpha \varphi}(p)|^2\, dp \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi(p)|^2\, dp.
\end{aligned}$$

Zuletzt wurde wieder die Parsevalsche Gleichung benutzt. Sei nun $A_{ij}^{\alpha\beta}$ nicht notwendig konstant. Betrachte eine Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(B_\varepsilon(x_0))$ mit $x_0 \in \overline{\Omega}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j &= \int_{B_\varepsilon(x_0)} A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j \\
&\quad + \int_{B_\varepsilon(x_0)} \big(A_{ij}^{\alpha\beta}(x) - A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0)\big) \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j \\
&\geq
\end{aligned}$$

Schritt 2. Sei $\operatorname{spt} \varphi \subset B_\varepsilon(x_0)$ mit $x_0 \in \overline{\Omega}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j &= \int A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j + \int_{B_\varepsilon(x_0)} \big(A_{ij}^{\alpha\beta}(x) - A_{ij}^{\alpha\beta}(x_0)\big) \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j \\
&\geq \big(\lambda - \operatorname{osc}(A, \varepsilon)\big) \int_\Omega |D\varphi|^2.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Wähle nun eine Überdeckung $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=1}^N B_\varepsilon(x_k)$ mit $x_k \in \overline{\Omega}$. Sei $\eta_k \in C_c^\infty(B_\varepsilon(x_k))$ untergeordnete Teilung der Eins, genauer wollen wir

$$\sum_{k=1}^N \eta_k^2 \equiv 1 \quad \text{auf } \overline{\Omega}.$$

Es gilt dann für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und $1 \leq k \leq N$ fest einerseits

$$\begin{aligned}
\int A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha(\eta_k \varphi^i) \partial_\beta(\eta_k \varphi^j) &\leq \int \eta_k^2 A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j \\
&\quad + C \int \big(|\eta_k||D\eta_k||\varphi||D\varphi| + C \int |D\eta_k|^2 |\varphi|^2 \\
&\leq \int \eta_k^2 A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j \\
&\quad + \delta \int \eta_k^2 |D\varphi|^2 + C(\delta) \int |D\eta_k|^2 |\varphi|^2.
\end{aligned}$$

Andererseits haben wir mit Schritt 2 die Abschätzung nach unten

$$\begin{aligned}
\int A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha(\eta_k \varphi^i) \partial_\beta(\eta_k \varphi^j) &\geq \big(\lambda - \operatorname{osc}(A, \varepsilon)\big) \int_\Omega |D(\eta_k \varphi)|^2 \\
&\geq \big(\lambda - \operatorname{osc}(A, \varepsilon)\big) \int_\Omega \eta_k^2 |D\varphi|^2 \\
&\quad - C \int_\Omega \big(|\eta_k||D\eta_k||\varphi||D\varphi| + |D\eta_k|^2 |\varphi|^2\big) \\
&\geq \big(\lambda - \operatorname{osc}(A, \varepsilon) - \delta\big) \int_\Omega \eta_k^2 |D\varphi|^2 + C(\delta) \int_\Omega |D\eta_k|^2 |\varphi|^2.
\end{aligned}$$

Kombination der beiden Ungleichungen ergibt

$$\big(\lambda - \operatorname{osc}(A, \varepsilon) - 2\delta\big) \int_\Omega \eta_k^2 |D\varphi|^2 \leq \int \eta_k^2 A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j + C(\delta) \int_\Omega |D\eta_k|^2 |\varphi|^2.$$

Jetzt summiere über $k = 1, \ldots, N$ und wähle $\delta = \lambda/4$:

$$\big(\frac{\lambda}{2} - \operatorname{osc}(A, \varepsilon)\big) \int_\Omega |D\varphi|^2 \leq \int A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j + C \int_\Omega |\varphi|^2.$$

Schließlich wähle $\varepsilon > 0$ mit $\operatorname{osc}(A, \varepsilon) \leq \lambda/4$. Die Konstante C hängt dann von der zugehörigen Teilung der Eins ab, und damit vom Stetigkeitsmodul von A. Die Terme niederer Ordnung mit Koeffizienten B_{ij}^α und C_{ij} lassen sich wie oben mit der Peter-Paul-Ungleichung verschlucken, wir verzichten darauf das explizit zu machen. □

Mit der Gardingschen Ungleichung können wir nun den Beweis der L^2 a priori Abschätzungen ganz analog zum stark elliptischen Fall durchführen. In diesen L^2 Abschätzungen tritt der Term $\int_\Omega |\varphi|^2$ ohnehin auf der rechten Seite auf, so dass die Regularitätstheorie auch unter dieser neuen Voraussetzung gilt.