Partielle Differentialgleichungen — WS 17/18, Serie 11
Ernst Kuwert — 19. Januar 2018
Julian Scheuer

Aufgabe 1 *(Produktregel)*
Zeigen Sie für $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und die α-Hölder-Konstante die Abschätzung

$$[uv]_{\alpha,G} \leq [u]_{\alpha,G} \|v\|_{C^0(G)} + \|u\|_{C^0(G)} [v]_{\alpha,G}.$$

Aufgabe 2 *(Höldernorm als Mengenfunktion)*
Sei $U_1(0)$ der parabolische Ball um 0 mit Radius 1. Für $u : U_1(0) \to \mathbb{R}$ sei $\mu(U) = [u]_{\alpha,U}$ für jedes offene $U \subset U_1(0)$. Zeigen Sie: Falls U konvex ist, $U_j \subset U_1(0)$ und

$$U \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j$$

gilt, so folgt

$$\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{N} \mu(U_j).$$

Aufgabe 3 *(elliptischer Satz von Liouville)*
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^n$ den Operator $(Lu)_\alpha = A^{ij}_{\alpha\beta}\partial^2_{ij}u_\beta$, wobei $A^{ij}_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ konstant und elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$ (Bedingung von Legendre-Hadamard). Zeigen Sie mit L^2 a priori Abschätzungen: ist $Lu = 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und

$$|u(x)| \leq C|x|^{2+\alpha} \quad \text{für ein } \alpha \in [0,1),\ |x| \text{ hinreichend groß},$$

so ist $u(x)$ ein quadratisches Polynom.

Abgabe am Dienstag, 23.01.2018