Partielle Differentialgleichungen — WS 17/18, Serie 8
Ernst Kuwert — 5. Dezember 2017
Julian Scheuer

Aufgabe 1 *(Kettenregel)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\sup |f'| < \infty$. Für $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist dann $f \circ u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und
$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

Aufgabe 2 *(Algebra von Sobolev-Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \geq 0$. Beweisen Sie, dass $W^{k,\infty}(\Omega)$ eine Algebra ist.

Aufgabe 3 *(Koeffizienten von Δ_g)*
Sei $g = (g_{ij}) : \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$ gleichmäßig elliptisch:
$$g_{ij}(x)\xi^i\xi^j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$
Zeigen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_0$
$$\|\sqrt{\det g}\,\|_{W^{k,\infty}(\Omega)},\ \|g^{-1}\|_{W^{k,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n})} \leq C\,(n, \lambda, \|g\|_{W^{k,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n})}).$$

Abgabe am Dienstag, 12.12.2017