Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE 2 — SoSe 2021, Serie 01
Prof. Dr. G. Wang — 19.4.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Hölderstetigkeit*) (4 Punkte)

a) Es sei $\alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Hölderräume:

(i) Sind $f_1, f_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|g'(s)| \leq C < \infty$ für alle $s \in \mathbb{R}$, so gelten $f_1 \cdot f_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $g \circ f_1 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.

(ii) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(f_n) \subset C^\alpha$ eine Folge mit

$$\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_{C^\alpha(K)} \leq C < \infty,$$

so hat (f_n) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

(iii) Ist zusätzlich $\alpha < \beta \in (0,1)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so ist die Einbettung

$$\imath : C^\beta(\overline{\Omega}) \subset C^\alpha(\overline{\Omega}), \imath(f) := f$$

wohldefiniert und kompakt.

b) Seien $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Gilt $C^\beta(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega)$ für alle Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 2 (*L ist nicht invertierbar*) (4 Punkte)
Es sei $R \in (0,1)$ und $B = B_R(0)$ die Kugel mit Radius R um 0 in $\mathbb{R}^2$. Wir definieren Funktionen $f, u : \bar{B} \to \mathbb{R}$ durch $f(0) = u(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2}\Big\{\frac{n+2}{-\log|x|^{1/2}} + \frac{1}{2(-\log|x|)^{3/2}}\Big\}, \\ u(x) &= (x_1^2 - x_2^2)(-\log|x|)^{1/2} - \sqrt{-\log R}(x_1^2 - x_2^2). \end{aligned}$$

für $x \neq 0$. Zeigen Sie $f \in C^0(\bar{B})$ und $u \in C^1(\overline{B}) \cap C^\infty(\overline{B}\backslash\{0\})$. Beweisen Sie, dass u eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \text{ in } B \\ u &= 0, \text{ auf } \partial B \end{aligned}$$

ist. Zeigen Sie nun noch, dass u keine klassische Lösung ist, indem Sie $u \notin C^2(B)$ nachweisen. Rechnen Sie hierfür $\lim_{x \to x_0, |x|<R} D_{11}u = \infty$ nach.

Es folgt dass, dass $L : X \to Y$ *nicht* invertierbar ist.

Aufgabe 3 (*Das Lemma von Lax–Milgram mit variationelle Methoden*) (8 Punkte)
Es sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum und :a $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Es gebe Konstanten $C_0, C_1 > 0$, sodass die folgenden Bedingungen gelten:

(i) Für alle $u, v \in \mathcal{H}$ git $|a(u,v)| \leq C_0 \|u\| \|v\|$. (Stetigkeit)

(ii) Für alle $u \in \mathcal{H}$ gilt $a(u,u) \geq \frac{1}{C_1} \|u\|^2$ (Koerzivität)

Schließlich sei $F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional. In dieser Aufgabe wollen wir das Lemma von Lax-Milgram zeigen:

Es gibt genau ein $u \in \mathcal{H}$, sodass

$$a(u, v) = F(v), \forall v \in \mathcal{H}$$

gilt. Dieses u erfüllt zusätzlich

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq C_1 \|F\|_{\mathcal{H}^*}. \tag{1}$$

Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass ein $u \in \mathcal{H}$ genau dann die quadratische Form

$$J : H \to \mathbb{R},\ J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - F(v)$$

minimiert, wenn $a(u, v) = F(v)$ für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass J ein eindeutiges Minimum in $\mathcal{H}$ annimmt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass J von unten beschränkt ist. Setzen Sie nun

$$\rho := \inf_{\mathcal{H}} J$$

und zeigen Sie, dass jede Folge $(v_k) \subset \mathcal{H}$ mit $J(v_k) \to \rho$ eine Cauchy-Folge ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die eindeutige Lösung $u \in \mathcal{H}$ die Ungleichung (1) erfüllt.

Eine Anwendung
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Nutzen Sie Teil (i) um zu zeigen, dass jede schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des elliptischen Problems

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij} D_j u) = f \quad \text{in } \Omega,$$

mit $f \in L^2(\Omega)$ und symmetrischen sowie elliptischen $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, der Minimierer eines passenden Funktionals ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, 26.4.21, 14:15 Uhr