Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 — SS2021, Serie 02
Prof. Dr. G. Wang — 19.4.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Abstrakte Poincare-Ungleichung*) (2 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand und $1 \leq p < 2$. Weiter sei K ein abgeschlossener Kegel in $W^{1,p}(\Omega)$ mit der Eigenschaft:

$$u \in K \quad \& \quad \nabla u = 0 \Longrightarrow u = 0.$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C_{K,p} > 0$ gibt, sodass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{K,p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in K. \tag{1}$$

Zur Erinnerung: *Eine Teilmenge K eines Vektorraums heißt Kegel, falls für $x \in K$ und $t \in [0, \infty)$ immer auch $tx \in K$ gilt.*

Hinweis: Argumentieren Sie durch Widerspruch: Zeigen Sie unter der Annahme, (1) wäre falsch, dass eine Folge $(u_n) \subset K$ mit $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ und $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n}$ existiert. Nutzen Sie nun den Satz Rellich–Kondrachov um eine in $L^p(\Omega)$ konvergente Teilfolge zu erhalten.

Aufgabe 2 (Satz von Liouville) (4+2 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ existiere $\theta \in (0,1)$ mit

$$\int_{B_{r/2}(x_0)} |\nabla u|^2 dx \leq \theta \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 dx, \qquad \forall x_0 \in \Omega, \forall r \text{ mit } B_r(x_0) \subset \Omega$$

a) Zeigen Sie, dass $\alpha \in (0,1)$ existiert, sodass gilt:

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 dx \leq K r^{2\alpha}, \qquad \forall x_0 \in \Omega, \forall r \text{ mit } B_r(x_0) \subset \Omega \tag{2}$$

Hierbei ist $K > 0$ eine Konstante, die nur von u und x_0 aber nicht von r abhängig ist.
Bemerkung: Wir werden in der Vorlesung zeigen: (2) *impliziert* $u \in C^\alpha$ $(n = 2)$

b) Zeigen Sie den Satz von Liouville:
Sei $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ eine beschränkte Lösung von der elliptischen Gleichung $-\sum_{i,j=1}^{2} D_j(a_{ij} D_i u) = 0$. Dann ist u konstant.
Hierbei dürfen Sie nutzen, dass jede solche Lösung schon (2) und zusätzlich

$$\int_{B_{r/2}(x_0)} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{C}{r^2} \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx, \qquad \forall x_0 \in \Omega, \forall r \text{ mit } B_r(x_0) \subset \Omega$$

erfüllt.
Bemerkung: Man kann dies wie in Lemmata 3.2 und 3.6 zeigen.

Aufgabe 3 (*Garding-Ungleichung*) (4+4 Punkte)
In dieser Aufgabe beweisen Sie die Garding-Ungleichung:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und stetige Funktionen $A_{ij}^{\alpha\beta} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gegeben, die stark elliptisch sind, also

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\eta_i\eta_j \geq \nu|\xi|^2|\eta|^2$$

für ein $\nu > 0$ und für alle $\eta \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \bar{\Omega}$. Dann existiert eine Konstante $K = K(\Omega, A) > 0$, sodass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i \partial_\beta u^j dx \geq \frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - K\int_\Omega |u|^2 dx \tag{3}$$

Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

Schritt 1: Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der $A_{ii}^{\alpha\beta}$ existiert $r > 0$, sodass

$$\sup_{x\in\Omega} \|A(x) - A(x_0)\| \leq \frac{\nu}{4C(n,N)}, \qquad \text{für alle } x_0 \in \overline{\Omega} \text{ und } x \in \overline{\Omega} \text{ mit } |x - x_0| < r.$$

(Je nachdem, wie Sie die Norm auf $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definieren müssen Sie $C(n, N)$ anpassen). Zeigen Sie nun, dass für jedes $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i \partial_\beta u^j dx \geq \frac{3}{4}\nu\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,2}(B_r(x_0), \mathbb{R}^N) \text{ gilt..}$$

Schritt 2: Sei r wie in Schritt 1. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung $(B_r(x_k))_{k=1}^l$ mit Punkten $x_k \in \overline{\Omega}, k = 1, 2, ..., l$. Wählen Sie nun eine Teilung der Eins $\{\phi_k\}_k \in C_0^\infty(B_{r/2}(x_k))$ bzgl. dieser Überdeckung mit $\sum_{k=1}^l \phi_k^2 = 1$. Dann ist klar, dass

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i \partial_\beta u^j d^n x = \sum_{k=1}^l \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(\phi_k\partial_\alpha u^i)(\phi_k\partial_\beta u^j) d^n x.$$

Schächtzen Sie nun die Differenz

$$|A_{ij}^{\alpha\beta}(\phi_k\partial_\alpha u^i)(\phi_k\partial_\beta u^j) - A_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\phi_k u^i)\partial_\beta(\phi_k u^j)|$$

mit der Youngschen-Ungleichung ab und zeigen Sie (3).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 03.05.2021, 12:15 Uhr