Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 SS2021, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang 03.05.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Differenzquotienten*) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für u in $W^{1,p}(\Omega)$ auch $\partial_\alpha^h u \in W^{1,p}(\Omega_h)$ gilt mit schwacher Ableitung $D\partial_\alpha^h u = \partial_\alpha^h Du$. Zeigen Sie außerdem für $u, v \in L^p(\Omega)$ die Leibniz-Regel

$$\partial_\alpha^h(uv)(x) = u(x + he_\alpha)\,\partial_\alpha^h v(x) + \partial_\alpha^h u(x)\,v(x).$$

Zeigen Sie schließlich, dass für hinreichend kleine h

$$\int_\Omega u\partial_\alpha^h v dx = -\int_\Omega v\partial_\alpha^{-h} u dx$$

gilt, falls u oder v in $W_c^{1,p}(\Omega)$. Hierbei ist

$$W_c^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{Es gibt } K \subset \Omega \text{ kompakt, sodass } u(x) = 0 \\ \text{für fast alle } x \in \Omega \backslash K \text{ gilt.}\end{array} \right\}.$$

Aufgabe 2 (*Morrey Räume*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie

a) $L^{2,n}(\Omega) = L^\infty(\Omega)$.

b) $L^{2,\lambda}(\Omega) = \{0\}$ für $\lambda > n$.

Hinweis. Für a) ist der Satz über Lebesque-Punkte hilfreicht. Dieser besagt:
Für $f \in L^1(\Omega)$ gilt

$$f(x_0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r(x_0) \cap \Omega|} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} f(x)\,dx, \qquad \textit{für fast alle } x_0 \in \Omega$$

Aufgabe 3 (*Campanato Räume*) (8 Punkte)
Zeigen Sie die Aussagen (1), (2) und (4) von Lemma 5.9:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\lambda \in (0, n + 2)$.Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1) $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist ***nicht*** dicht in $\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)$.

(2) Ist $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, so existiert eine Folge $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f_k \to f \quad \text{in } L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \limsup_{k\to\infty}[f_k]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

(4) Es gilt die folgende Implikation:

$$f_k \rightharpoonup f \quad \text{in } L^2_{loc}(\Omega) \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}[f_k]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)} \ge [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)}.$$

Hinweis.

(1) *Es sei* $X_\lambda := \overline{C^\infty(\overline{\Omega})} \subset \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)$. *Hierbei ist der Abschluss als solcher bezüglich der* $||\cdot||_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)}$*-Norm zu verstehen. Zeigen Sie zunächst, dass*

$$f \in X_\lambda \Longrightarrow \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^\lambda} \int_{B_r(x)\cap\Omega} |f - f_{x,r}|^2 dy = 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{1}$$

Betrachten Sie hierfür zunächst $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *und wenden Sie anschließend ein Dichtheitsargument an.*

Nehmen Sie nun OE $0 \in \Omega$ *an und zeigen Sie* $g \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)/X_\lambda$, *wobei* g *wie folgt definiert ist:*

$$g(x) := \begin{cases} |x|^{\frac{\lambda-n}{2}}, & \textit{falls } \lambda \neq n, \\ -\ln|x| & \textit{falls } \lambda = n. \end{cases}$$

(2) *Es sei* $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ *mit* $\eta \geq 0$ *und* $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$ *(also ein Glättungskern). Setzen Sie* $\eta_k(x) = k^n\eta(kx)$ *und definieren Sie* $f_k = \eta * f$ *als Faltung.*
Mit der Jensens-Ungleichung (oder der Hölder-Ungleichung) gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g(z)\eta_k(z)dz \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|^2 \eta_k(z)^2 dz \tag{2}$$

für alle vernünftigen Funktionen g. *Setzen Sie nun in* (2) *die Funktion*

$$g(z) = f(y-z) - \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y-z)dy$$

ein und integrieren die linke Seite von (2) *um* $[f_k]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \leq [f]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}}$ *zu zeigen.*

(4) *Zunächst kann durch Übergang zu einer Teilfolge* $L := \lim_{k\to\infty}[f_k]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)}$ *angenommen werden. Außerdem können wir* $L < \infty$ *annehmen, denn...?*

Nun geht es mit Widerspruch weiter. Wäre die Implikation falsch, so gebe es $x \in \Omega,\ r > 0$ *und* $\delta > 0$ *mit*

$$\frac{1}{r^\lambda} \int_{B_r(x)\cap\Omega} |f(y) - f_{x,r}|^2 dy \geq L + \delta.$$

Leiten Sie hierraus einen Widerspruch zu $f_k \rightharpoonup f$ *in* $L^2_{loc}(\Omega)$ *ab.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 10.05.21, 15:15 Uhr