

Aufgabe 1 (*Campanato-Norm*)

(4 Punkte)

Zeigen Sie für messbare $E \subset \mathbb{R}^n$ und f die Ungleichungen

$$\int_E |f(x) - f_E|^2 dx \leq \frac{1}{|E|} \int_E \int_E |f(x) - f(y)|^2 dx dy \leq 4 \int_E |f(x) - f_E|^2 dx. \quad (1)$$

Eine Anwendung dieser Ungleichung folgt aus Blatt 5.

Aufgabe 2 (*Globale Abschätzung im \mathbb{R}^n*)

(6+6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir den folgenden Satz behandelt:

Theorem 0.1 (Globale Abschätzung im \mathbb{R}^n für konstante Koeffizienten) Seien $A_{ij}^{\alpha\beta}$ konstant und starke elliptisch.

1. Sei $f_i^\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times N})$. Dann existiert es eine schwache Lösung $u \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ des Systems

$$-\operatorname{div}(A \nabla u) = -\operatorname{div} f \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad \text{mit } \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times N}). \quad (2)$$

Weiter ist u eindeutig bis auf einer additiven Konstante und gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\nu^2} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx. \quad (3)$$

2. Sei $\lambda \in (0, n+2)$ und $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times N})$ mit $[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} < \infty$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ des Systems

$$-\operatorname{div}(A \nabla u) = -\operatorname{div} f \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad \text{mit } [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} < \infty.$$

u ist bis auf Addition mit affinen Funktionen eindeutig bestimmt und erfüllt

$$[\nabla u]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}. \quad (4)$$

Hierbei hängt die Konstante C nur von n und $\|A\|/\nu$ ab.

Teil 1) wurde bereits in der Vorlesung bewiesen. In dieser Aufgabe zeigen wir den zweiten Teil. Folgen Sie dafür den folgenden Schritten:

- (i) Wir nehmen zusätzlich $\operatorname{supp} f \subset B_{R_0}$ für ein $R_0 > 0$ an. Dann gilt $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und wir können den ersten Teil des Satzes anwenden. Sei $u \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ die schwach Lösung mit $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times N})$. u erfüllt eine innere Abschätzung (Satz 6.1 der Vorlesung) sowie (3) mit $\nu = 1$. Nutzen Sie diese beiden Aussagen um die Abschätzung (4) zu zeigen. Nutzen Sie hierfür die innere Abschätzung für große $R > 0$ und schätzen Sie mit (3) weiter ab.

- (ii) Sei nun $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times N})$ mit $[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ ohne die Zusatzannahmen. Zeigen Sie die Existenz einer schwachen Lösung $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$.

Sei $\eta \in C^\infty_c(B_1, [0, 1])$ mit $\eta = 1$ in $B_{1/2}$ und für $k \in \mathbb{N}$ weiter $\eta_k(x) = \eta(2^{-k}x)$. Wir setzen

$$f_k = (f - f_{0,2^k})\eta_k.$$

Aus Aufgabe 1 wissen wir $[f_k]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$. Nach (i) existiert eine Lösung u_k der Gleichung $-\operatorname{div}(\nabla u_k) = -\operatorname{div} f_k$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k|^2 dx$ und Schritt (i) liefert $[u_k]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$. Zeigen Sie, dass für alle $\rho \geq 1$

$$\int_{B_\rho} |\nabla u_k - (\nabla u_k)_{0,\rho}|^2 dx \leq C\rho^\lambda [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}, \quad |(\nabla u_k)_{0,\rho} - (\nabla u_k)_{0,1}|^2 \leq C(\rho)[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

gilt. Dann zeigen Sie dass es eine Teilfolge von $\nabla u_k - (\nabla u_k)_{0,1}$ gibt, die gegen v in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ schwach konvergiert. Weiter zeigen Sie dass $\tilde{u}_k := u_k - (u_k)_{0,1} - (\nabla u_k)_{0,1}x$ gegen eine u in $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ schwach konvergiert. Zeigen Sie schließlich, dass u eine schwache Lösung der Gleichung ist und die Abschätzung (4) für $[\nabla u]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ mit Hilfe der Aufgabe 3 (4) im Blatt 03.

- (iii) Zeigen Sie die Eindeutigkeit von u bis auf Addition mit affinen Funktionen.

Hinweis. Benutzen Sie Gleichung (4.29) aus der Vorlesung für ein sinnvolles u :

$$\sup_{B_{r/2}} |\nabla^2 u|^2 \leq \frac{C}{r^{n+2}} \int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 dx$$

Betrachten Sie nun den Grenzwert $r \rightarrow \infty$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 17.05.21, 23:59 Uhr