Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 SS2021, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang 10.05.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Campanato-Norm*) (6 Punkte)
Sei $\lambda \in (0, n+2)$ und $g \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{B_1(0)} g(x) = 0$.

(a) Zeigen Sie $\int_{B_3(0)} |g(x)|^2 dx \leq C[g]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ und

$$\int_{B_R(x)} |g(y)|^2 dy \leq C_\lambda h_\lambda(R)[g]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \text{für } |x| \leq 2 \text{ und } R \leq 1,$$

Hierbei ist $h_\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ wie folgt definiert:

$$h_\lambda(r) = \begin{cases} r^\lambda & \text{falls } \lambda < n, \\ (1 + \ln^2 1/r)^n & \text{falls } \lambda = n, \\ r^n & \text{falls } \lambda > n. \end{cases}$$

Hinweis. Benutzen Sie die Abschätzung $|g_{x,r} - g_{x,s}| \leq Cr^{(\lambda-n)/2}[g]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ *für* $r/2 \leq s < r$ *aus der Vorlesung.*

(b) Sei zusätzlich $\eta \in C^1_c(B_1(0))$ mit $0 \leq \eta \leq 1$. Zeigen Sie $\eta g \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$[\eta g]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C(1 + \mathrm{Lip}(\eta))[g]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\omega(x, r) := \int_{B_r(x)} |\eta g - (\eta g)_{x,r}|^2 dy$ *für* $|x| \leq 2$ *und* $0 < r \leq 1$ *verwenden die Ungleichungen (1). Für andere* x *und* r *gilt entweder* $\omega(x, r) = 0$, *oder* $\omega(x, r) \leq \int_{B_r(x)} |\eta g|^2 \leq \int_{B_r(x)} |g|^2$*(wieso?).*

(c) Zeigen Sie für messbare $E \subset \mathbb{R}^n$ und f die Ungleichungen

$$\int_E |f(x) - f_E|^2 dx \leq \frac{1}{|E|} \int_E \int_E |f(x) - f(y)|^2 dx dy \leq 4 \int_E |f(x) - f_E|^2 dx. \tag{1}$$

Aufgabe 2 (*Globale Abschätzung im* $\mathbb{R}^n$) (10 Punkte) In der Vorlesung haben wir den folgenden Satz behandelt:

Theorem 0.1 (Globale Abschätzung im $\mathbb{R}^n$ für konstante Koeffizienten) *Seien* $A^{\alpha\beta}_{ij}$ *konstant und starke elliptisch.*

1. *Sei* $f^\alpha_i \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times N})$. *Dann existiert es eine eine schwache Lösung* $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ *des Systems*

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = -\mathrm{div}\, f \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad \text{mit } \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times N}). \tag{2}$$

Weiter ist u *eindeutig bis auf einer additiven Konstante und gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{\nu^2} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx. \tag{3}$$

2. *Sei $\lambda \in (0, n+2)$ und $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times N})$ mit $[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} < \infty$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ des Systems*

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = -\mathrm{div}\, f \quad \textit{in } \mathbb{R}^n, \quad \textit{mit } [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} < \infty.$$

u ist bis auf Addition mit affinen Funktionen eindeutig bestimmt und erfüllt

$$[\nabla u]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4}$$

Hierbei hängt die Konstante C nur von n und $\|A\|/\nu$ ab.

Teil 1) wurde bereits in der Vorlesung bewiesen. In dieser Aufgabe zeigen wie den zweiten Teil. Folgen Sie dafür den folgenden Schritten:

(i) Wir nehmen zusätzlich $\operatorname{supp} f \subset B_{R_0}$ für ein $R_0 > 0$ an. Dann gilt $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und wir können den ersten Teil des Satzes anwenden. Sei $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ die schwach Lösung mit $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times N})$. u erfüllt eine innere Abschätzung (Satz 6.1 der Vorlesung) sowie (3) mit $\nu = 1$. *Nutzen Sie diese beiden Aussagen um die Abschätzung (4) zu zeigen. Nutzen Sie hierfür die innere Abschätzung für große $R > 0$ und schätzen Sie mit (3) weiter ab.*

(ii) Sei nun $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times N})$ mit $[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}}(\mathbb{R}^n) < \infty$ ohne die Zusatzannahmen. Zeigen Sie die Existenz einer schwachen Lösung $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$.

Sei $\eta \in C^\infty_c(B_1, [0,1])$ mit $\eta = 1$ in $B_{1/2}$ und für $k \in \mathbb{N}$ weiter $\eta_k(x) = \eta(2^{-k}x)$. Wir setzen

$$f_k = (f - f_{0,2^k} 1_{B_{2^k}(0)})\eta_k.$$

Aus Aufgabe 1 wissen wir $[f_k]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$. Nach (i) existiert eine Lösung u_k der Gleichung $-\mathrm{div}\,(\nabla u_k) = -\mathrm{div}\, f_k$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k|^2 dx$ und Schritt (i) liefert $[u_k]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$. *Zeigen Sie, dass für alle $\rho \geq 1$*

$$\int_{B_\rho} |\nabla u_k - (\nabla u_k)_{0,\rho}|^2 dx \leq C\rho^\lambda [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}, \quad |(\nabla u_k)_{0,\rho} - (\nabla u_k)_{0,1}|^2 \leq C(\rho)[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

gilt. Dann zeigen Sie dass es eine Teilfolge von $\nabla u_k - (\nabla u_k)_{0,1}$ gibt, die gegen v in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ schwach konvergiert. Weiter zeigen Sie dass $\tilde{u}_k := u_k - (u_k)_{0,1} - (\nabla u_k)_{0,1}x$ gegen eine u in $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ schwach konvergiert. Schließlich zeigen Sie dass u eine schwache Lösung der Gleichung und der Abschätzung für $[\nabla u]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ mit Hilfe der Aufgabe 3 (4) im Blatt 03.

(iii) *Zeigen Sie die Eindeutigkeit von u bis auf Addition mit affinen Funktionen.*

Hinweis. Benutzen Sie

$$\sup_{B_{r/2}} |\nabla^2 u|^2 \leq \frac{C}{r^{n+2}} \int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 dx$$

für $r \to \infty$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 17.05.21, 12:15 Uhr