Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 SS2021, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang 17.05.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Campanato-Norm*) (6+2 Punkte)
Sei $\lambda \in (0, n+2)$ und $g \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ mit $\fint_{B_1(0)} g(x) = 0$.

(a) Zeigen Sie $\int_{B_3(0)} |g(x)|^2 dx \leq C[g]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ und

$$\int_{B_R(x)} |g(y)|^2 dy \leq C_\lambda h_\lambda(R)[g]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \text{für } |x| \leq 2 \text{ und } R \leq 1,$$

Hierbei ist $h_\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ wie folgt definiert:

$$h_\lambda(r) = \begin{cases} r^\lambda & \text{falls } \lambda < n, \\ (1 + \ln^2 1/r) r^n & \text{falls } \lambda = n, \\ r^n & \text{falls } \lambda > n. \end{cases}$$

Hinweis. Benutzen Sie die Abschätzung $|g_{x,r} - g_{x,s}| \leq C r^{(\lambda-n)/2}[g]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ *für* $r/2 \leq s < r$ *aus der Vorlesung mehrfach.*

(b) Sei zusätzlich $\eta \in C^1_c(B_1(0))$ mit $0 \leq \eta \leq 1$. Zeigen Sie $\eta g \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$[\eta g]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C(1 + \mathrm{Lip}(\eta))[g]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\omega(x,r) := \int_{B_r(x)} |\eta g - (\eta g)_{x,r}|^2 dy$. *Für* $|x| \leq 2$ *und* $0 < r \leq 1$ *verwenden die Ungleichungen aus Aufgabe 1 von Blatt 4. Für andere* x *und* r *gilt entweder* $\omega(x,r) = 0$, *oder* $\omega(x,r) \leq \int_{B_r(x)} |\eta g|^2 \leq \int_{B_r(x)} |g|^2$, *denn...?*

Aufgabe 2 (*Campanato-Räume*) (4 Punkte)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ ein Diffeomorphismus der Klasse C^1 und $L > 1$, sodass für alle $x, y \in \Omega$ gilt

$$\frac{1}{L}|x - y| \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\phi(\Omega))$ genau dann wenn $f \circ \phi \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)$ und, dass in diesem Fall die Abschätzungen

$$||f \circ \phi||_{L^2(\Omega)} \leq L^{\frac{n}{2}} ||f||_{L^2(\phi(\Omega))} \quad \text{und} \quad [f \circ \phi]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\phi(\Omega))} \leq L^{\frac{n+\lambda}{2}} [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)}$$

gelten. Zeigen Sie schließlich, dass im Fall $|\det D\phi| = 1$ auf die L-anhängigen Faktoren verzichtet werden kann.
Hinweise:

1. *Eigentlich reicht es vollkommen zu zeigen, dass mit f auch $f \circ \phi$ im entsprechenden Campanato-Raum liegt, denn man kann doch sicher das Argument mit $\phi \to \phi^{-1}$ kopieren, oder?*

2. *Das ärgerliche an den Integralen ist doch* $\det D\phi$, *das wir ja überhaupt nicht kontrollieren können. Hierfür schreibt man am besten*

$$|\det D\phi(x)| = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |\det D\phi(y)| d^n y$$

und schreibt das Integral mit der Transformationsformel um. Dabei handelt man sich aber $\phi(B_r(x))$ *ein. Um das unter Kontrolle zu bringen könnte die Abschätzung (1) hilfreich sein.*

Aufgabe 3 (*Ein Neumann-Problem*) (4+6*+2* Punkte)
Es seien $R > 0$, $B_R^+(0) := \{x \in B_R(0) \mid x_n > 0\}$, $\Gamma_R := \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cap \bar{B}_R^+$ und $g \in C^\infty(\Gamma_R)$. Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = g \text{ in } B_R^+(0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \text{ auf } \Gamma_R \end{cases} \tag{$*$}$$

in schwacher Form. Das heißt eine Lösung u erfüllt für alle $\phi \in X$ (Definition kommt gleich)

$$\int_{B_R^+} \nabla u \nabla \phi = \int_{\Gamma_R} g\phi$$

wobei $X = \{\phi \in H^1(B_R^+) \mid \phi = 0 \text{ auf } \partial B_R^+ \setminus \Gamma_R\}$. $u = 0$ auf dem Rand ist hierbei im Sinne des Spuroperators zu verstehen. Zeigen Sie:

a) Für $0 < s < r < R$ erfüllt jede Lösung von von $(*)$ die Abschätzung

$$\int_{B_s^+} |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{r^2} \frac{C}{|1 - \frac{s}{r}|^2} \int_{B_r^+ \setminus B_s^+} |u - a|^2 + C \int_{\Gamma_r} g^2$$

für alle $a \in \mathbb{R}$. Hierbei ist C eine von r, s und u unabhängige Konstante.

b) Wir definieren für $v : B_r^+ \to \mathbb{R}^d$ die Abkürzung $v_r^+ := \frac{1}{|B_r^+|} \int_{B_r^+} v$. Zeigen Sie, dass es Konstanten $K_1(n, r, R)$ und $K_2(n, r, R)$ gibt, sodass eine jede Lösung von $(*)$ die folgenden beiden Abschätzungen erfüllt:

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}^+} |\nabla u|^2 \leq \frac{C(R)}{r^2} \int_{B_r^+} |u - u_r^+|^2 + K_1(n, r) ||g||_{C^k(\Gamma_r)}^2$$

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}^+} |\nabla^2 u|^2 \leq \frac{C(R)}{r^2} \int_{B_r^+} |\nabla u - (\nabla u)_r^+|^2 + K_2(n, r) ||g||_{C^k(\Gamma_r)}^2.$$

Geben Sie außerdem explizite Schranken für K_1 und K_2 (die die Konstante aus Teil a) enthalten dürfen) an.

c) Schließen Sie auf die Existenz einer Konstante $K(n,r)$ sodass für alle $s \in (0, \frac{r}{2})$ die Abschätzung

$$\int_{B_s^+} |\nabla u - (\nabla u)_s^+|^2 \leq C s^{n+2} \left(\frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r^+} \int_{B_r^+} |\nabla u - (\nabla u)_r^+|^2 + K(n,r) ||g||_{C^k}^2 \right)$$

gilt.

Hinweise:

a) *Satz 4.10 hat eine ähnliche Aussage - der Beweis könnte also eventuell ähnlich sein. Nur hat man hier das Randintegral zusätzlich. Hier dürfen Sie ohne Beweis nutzen, dass für* $v \in H^1(B_R^+)$ *die Ungleichung* $||v||_{L^2(\Gamma_R)}^2 \leq C||v||_{L^2(B_R^+)}||v||_{H^1(B_R^+)}$ *gilt. Schließlich gibt es auf dem Raum* $\{v \in H^1(B_R^+) \mid v = 0 \text{ auf } B_R^+ \setminus B_r^+\}$ *eine Poincare-Ungleichung. Tatsächlich ist nämlich für solche* v

$$\int_{B_R^+} v^2 = \int_{B_R^+} v^2 \partial_1 x_1 = -\int_{B_R^+} 2v\partial_1 v x_1 + \int_{B_R^+} \partial_1(v^2 x_1).$$

Mit dem Divergenzssatz ist

$$\int_{B_R^+} \partial_1(v^2 x_1) = \int_{\partial B_R^+} v^2 x_1 \nu_1.$$

Das Integral besteht aus zwei Teilen. Auf dem einen ist v *nach Voraussetzung* 0. *Auf dem anderen verschwindet* ν_1.

b) *Ebenfalls Satz 4.10.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 31.05.21, 12:15 Uhr