Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 SS2021, Serie 06
Prof. Dr. G. Wang 31.05.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Abschätzungen in Funktionenräumen*) (3+3 Punkte)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand.

a) Sei Ω zusätzlich zusammenhängend. Zeigen Sie, dass für alle $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ die Abschätzung
$$[u]_{C^{0,1}(\Omega)} \leq C(\Omega)||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)}.$$

b) Seien $\mu \in (0,1)$ und $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $C(\epsilon) > 0$ gibt, sodass für alle $u \in C^{k,\mu}(\Omega)$ folgende Abschätzung gilt:
$$\sum_{l=0}^{k} \sup_{\Omega} |\nabla^l u| \leq \epsilon[\nabla^k u]_{\mu,\Omega} + C(\epsilon)||u||_{L^2(\Omega)}$$

Hinweise:

1. *Sind $x, y \in \Omega$ und liegt die Verbindungsstrecke $[x, y]$ ganz in Ω, so hilft $u(x) - u(y) = \int_0^1 \nabla u(y + t(x - y))(x - y)dt$. Für eine Rechtfertigung dieser Formel schauen Sie in Aufgabe 4. Sind x, y nahe am Rand, so kann eine Umgebung, die x und y enthält, zunächst auf eine Halbkugel abgebildet werden und das Argument hier durchgeführt werden.*

   Alternativ kann man mit dem Erweiterungsoperator argumentieren.

   Eine letzte Option ist eine Approximation zu nutzen.

2. *Das geht zum Beispiel mit Widerspruch. Hierbei ist der Satz von Arzelà -Ascoli hilfreich.*

Aufgabe 2 (Der Raum BMO) (3+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen die Inklusion $W^{1,n}(\Omega) \subset \mathrm{BMO}(\Omega)$ und die Abschätzung $[f]_{\mathrm{BMO}} \leq C(n)||\nabla f||_{L^n}$ gelten.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) := 0$ und $f(x) := \ln |x|$ für $x \neq 0$. Zeigen Sie $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Hinweise:

1. *Überlegen Sie sich für Teil a) zunächst die Poincaré-Ungleichung*
$$\int_{Q(a,r)} |f - f_{Q(a,r)}| \leq Cr \int_{Q(a,r)} |\nabla f|$$
   und nutzen Sie anschließend die Hölder-Ungleichung.

2. *Betrachten Sie* $\phi(a,r) := r^{-n} \int_{Q(a,r)} |f - f_{Q(a,r)}|$ *und zeigen Sie* $\phi(\lambda a, \lambda r) = \phi(a,r)$ *für* $\lambda > 0$. *Nun genügt es* $\phi(a,1)$ *zu studieren. Hierfür unterscheiden Sie die Fälle* $Q(a,1) \cap Q(0,1) = \emptyset$ *und* $Q(a,1) \cap Q(0,1) \neq \emptyset$. *Im ersten Fall nutzen Sie nun, dass* f *außerhalb von* $Q(0,1)$ *Lipschitz ist und im zweiten, dass* $Q(a,1) \subset Q(0,2)$.

Aufgabe 3 (*Ein Lemma*) (5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\lambda \in (0, n+2)$ und $g \in L^{2,\lambda-2}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass es ein $f \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gibt, sodass

$$\operatorname{div} f = g \quad \text{und} \quad [f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^n)} \leq C(n)[g]_{L^{2,\lambda-2}(\Omega)}.$$

Zur Erinnerung: Für $\mu < 0$ ist $L^{2,\mu}(\Omega) := L^2(\Omega)$ und $[g]^2_{L^{2,\mu}(\Omega)} := \operatorname{diam}(\Omega)^{-\mu} \int_\Omega |g|^2$.

Hinweis: Es sei $R := 2\operatorname{diam}(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, $B_\rho := B_\rho(x_0)$ *für* $\rho > 0$ *und hat* $\hat{g} : B_R \to \mathbb{R}$ *definiert als Fortsetzung von* g *durch* 0. *Betrachten Sie die eindeutige Lösung* $v \in H^1_0(B_R)$ *des Problems*

$$-\Delta v = g \ \text{ in } B_R.$$

Wir setzen $f := \nabla v$. *Nutzen Sie die innere Abschätzung (etwa wie Satz 6.1). Hier werden allerdings nur Gleichungen der Form* $-\Delta u = -\operatorname{div} X$ *behandelt. Für die hier vorliegende Situation beachten Sie Bemerkung 6.21 um eine entsprechende innere Abschätzung zu erhalten. Diese müssen Sie* ***nicht*** *beweisen.*

Nun benötigen Sie noch eine Abschätzung für $\int |\nabla v|^2$. *Testen Sie hierfür die Gleichung* $-\Delta v = g$ *mit* v *und verwenden Sie die Poincaré-Ungleichung.*

Aufgabe 4 (*Der Hauptsatz für $W^{1,\infty}$-Funktionen*) (4* Punkte)
Es sei A entweder ein offen und beschränktes Lipschitz Gebiet oder $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie für $u \in W^{1,\infty}(A)$ und $x, y \in A$ die Formel

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \nabla u(y + t(x - y))(x - y)dt.$$

Hinweis: Die Morrey-Ungleichung liefert $W^{1,\infty}(A) \hookrightarrow C^{0,1}(A)$. Sei nun $[u] \in W^{1,\infty}$ und u der eindeutige steitge Repräsentant. Dann ist u Lipschitz. Für $x, y \in A$ ist also die Funktion

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi(t) := u(x + t(y - x))$$

lipschitz und daher nach dem Satz von Rademacher fast überall klassisch differenzierbar. Wir definieren nun

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_k(t) := \begin{cases} k\left(\varphi\left(t + \frac{1}{k}\right) - \varphi(t)\right), & t \in [0, 1 - \frac{1}{k}] \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f_k \to \varphi'$ fast überall (denn...?). Außerdem ist $|f_k(t)| \leq \mathrm{Lip}(\varphi)$ (denn...?). Folglich liefert der Satz von Lebesgue

$$\int_0^1 \varphi'(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(t)dt \overset{!}{=} \lim_{k\to\infty} k\left(\int_{1-\frac{1}{k}}^1 \varphi(t)dt - \int_0^{\frac{1}{k}} \varphi(t)dt\right) \overset{!}{=} \varphi(1) - \varphi(0).$$

Hierbei sind die Schritt mit ! noch zu begründen. Schließlich dürfen Sie ohne Beweis nutzen, dass für fast alle x, y und t gilt

$$\varphi'(t) = \nabla u(x + t(y - x))(y - x).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 07.06.2021, 12:15 Uhr