Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 — SS2021, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang — 04.06.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Misserfolg der L^1 und L^∞-Abschätzungen*) (4+2+2 Punkte)
Sei $n = 2$ und $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$.

a) Wir definieren $u : B \to \mathbb{R}$ durch $u(0) := 0$ und

$$u(x) = \ln\ln(\frac{e}{|x|})$$

für $x \neq 0$. $u \in H_0^1(B)$. Das brauchen Sie nicht zu zeigen. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f \in L^1(B)$ gibt, sodass $\Delta u = f$ schwach gilt aber, dass trotzdem $u \notin W^{2,1}(B)$.

b) Wir definieren $w : B \to \mathbb{C}$ durch $w(0) := 0$ und

$$w(x) := r^2 \ln(r) e^{2i\theta}$$

für $x \neq 0$, wobei wir $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ in Polarkoordinaten darstellen. Wir definieren nun $g : B \to \mathbb{C}$ durch $g(0) := 0$ und $g(x) := \Delta w(x)$ für $x \neq 0$. Dann gilt $\Delta w = g$ schwach. Das müssen Sie nicht zeigen. Zeigen Sie aber, dass $q \in L^\infty(B)$ ist aber dennoch $w \notin W^{2,\infty}(B)$.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion aus Teil a) $u \in \mathrm{BMO}(B)$ erfüllt.

Hinweis zu a): Klar ist $u \in C^\infty(B\backslash\{0\}$. Der klare Kandidat für f ist also $f(x) := \Delta u(x)$ für $x \neq 0$. Zu zeigen ist nun $f \in L^1(B)$, $-\Delta u = f$ schwach in B und $u \notin W^{2,1}(B)$.

Aufgabe 2 (L^p*-Norm für* $p \to \infty$) (2 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $|\Omega| = 1$. Zeigen, für $f \in L^\infty(\Omega)$ gilt

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Hinweis: Es ist leichter zwei Ungleichungen zu zeigen.

Aufgabe 3 (*Vorbereitung für Aufgabe 4*) (4* Punkte)
Sei $p \in [1, \infty)$, $v \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\nabla v \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(\varphi_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass

$$\nabla \varphi_k \to \nabla v \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Hinweis: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *dicht. Folglich genügt es eine Folge* $(\varphi_k) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *zu konstruieren. Setzen Sie nun* $A_k := B_{2k} \backslash B_k$, *wählen Sie eine Cutoff Funktion* $\eta \equiv 1$ *auf* B_1, $\eta \equiv 0$ *auf* B_2, *setzen Sie* $\eta_k(x) := \eta(\frac{x}{k})$ *und setzen Sie* $\varphi_k := \eta_k(v - v_{A_k})$. *Um zu zeigen, dass* $\nabla \varphi_k \to \nabla v$ *in* L^p *nutzen Sie eine Poincaré-Ungleichung.*

Für die folgende Aufgabe benötigen wir das folgende Lemma:

> **Lemma.** *Sei* $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *mit den folgenden Eigenschaften:* $g = 0$ *auf* $\mathbb{R}^n \backslash B_1(0)$ *fast überall und* $\int g = 0$. *Dann gibt es* $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $-\Delta u = g$ *schwach in* $\mathbb{R}^n$ *mit* $||\nabla u||_{L^2} \leq C||g||_{L^2}$. *u ist bis auf Addition von Konstanten eindeutig.*

Aufgabe 4 (*Decay-Abschätzungen nahe Unendlich mittels Dualität*) (4+2 Punkte)
Es seien g und u wie im obigen Lemma. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $s \geq 4$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_s(0)} |\nabla u|^2 \leq \frac{C}{s^n} ||g||^2_{L^1}.$$

b) Für alle $|x| \geq 8$ gilt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} ||g||_{L^1}.$$

Hinweise:

1. *Um a) zu zeigen definieren Sie* $f := 1_{\mathbb{R}^n \backslash B_s(0)} \nabla u$. *Nun betrachten Sie die eindeutige schwache Lösung* $v \in H^1_{\text{loc}}$ *von* $-\Delta v = -\operatorname{div} f$ *mit* $\nabla v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Zeigen Sie nun*

$$\langle f, f \rangle = \langle f, \nabla u \rangle = \langle \nabla v, \nabla u \rangle = \langle v, \nabla g \rangle = \langle v - (v)_{B_1(0)}, \nabla g \rangle \leq C \sup_{B_1(0)} |\nabla v| \; ||g||_{L^1}.$$

   Hierbei ist Aufgabe 3 (und eventuell auch die Form $\varphi_k = \eta_k(v - const_k)$*) hilfreich. Zeigen Sie außerdem, dass* $||\nabla v||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}$ *gilt. Um a) zu zeigen nutzen Sie nun die Abschätzung für* $\sup_{B_{\frac{s}{2}}} |\nabla v|$ *aus Satz 4.10.*

2. *Die Abschätzung aus Teil b) folgt aus einer Kombination von der Abschätzung aus Teil a) und der für* $\sup_{B_{\frac{r}{2}}}(x)$ *aus Satz 4.10 für eine geeignete Wahl von r.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, 14.06.21, 12:15 Uhr