

**Aufgabe 1** (*Ein Variationsproblem*) (3+1+1+3 Punkte)  
Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand. Wir betrachten das Funktional

$$I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I[u] := \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) d^n x.$$

Hierbei sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  konvex und habe gleichmäßig beschränkte Ableitungen. Hiermit ist gemeint, dass es  $\nu, C > 0$  gebe, sodass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \xi^i \xi^j \geq \nu |\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right| \leq C.$$

- Nutzen Sie die direkte Methode der Variationsrechnung um zu zeigen, dass es für jedes Randdatum  $u_0 \in H^1(\Omega)$  einen Minimierer  $u$  des Funktionals  $I$  mit  $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$  gibt.
- Zeigen Sie, dass der Minimierer aus a) eindeutig ist.
- Zeigen Sie, dass  $u$  eine schwache Lösung der folgenden Euler-Lagrange Gleichung ist:

$$\partial_i \left( \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(\nabla u) \right) = 0$$

- Wir setzen nun

$$a_{ij}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j}(\nabla u(x)).$$

Aus den Annahmen über  $f$  folgt, dass die Koeffizienten  $a_{ij}$  in  $L^\infty(\Omega)$  liegen und einen elliptischen Operator definieren. Sei  $1 \leq k \leq n$  fix. Zeigen Sie, dass die partielle Ableitung  $v := \partial_k v$  in  $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  liegt und  $-\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j v) = 0$  schwach erfüllt.

*Hinweise:*

- Zu a): Nutzen Sie den Satz von Tonelli, der unten aufgeschrieben steht. Außerdem kann das Lemma von Mazur hilfreich sein um zu zeigen, dass der erhaltene Minimierer auch wirklich  $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$  erfüllt.
- Zu b): Hier muss man im Wesentlichen nur die **strikte** Konvexität von  $f$  ausnutzen.
- Zu d): Die Regularität zeigt man mit der Methode der Differenzenquotienten. Testen Sie die Euler-Lagrange Gleichung aus c) hierfür mit  $\Delta_{-h}^k(\eta^2 \Delta_h^k u)$  mit passender Cutoff-Funktion  $\eta$ . Nachdem Sie nun die Regularität nachgewiesen haben, testen Sie die Euler Lagrange Gleichung mit  $\partial_b \phi$ .

**Theorem 0.1** (Der (andere) Satz von Tonelli). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann ist die Abbildung

$$F : L^2(\Omega, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F[u] := \int_{\Omega} f(u(x)) d^n x$$

schwach unterhalbstetig (d.h.  $u_n \rightharpoonup u$  impliziert  $F[u] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F[u_n]$ )

Sollte Sie der Beweis dieser Aussage interessieren, so können Sie diesen in *Renardy, Michael & Rogers, Robert C. (2004). An introduction to partial differential equations* (Seite 347, Satz 10.16) nachschlagen.

Für die nächste Aufgabe erinnern wir zunächst an den Begriff einer schwachen Sublösung. Eine Funktion  $u \in H^1(\Omega)$  heißt schwache Sublösung von einem Operator  $L = -\partial_i(a^{ij}\partial_j \cdot)$ , falls für alle positiven Testfunktionen  $\varphi \geq 0$  gilt

$$\int a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi \leq 0. \quad (1)$$

**Aufgabe 2** (Der Raum  $H_-^1(\Omega)$ ). (2+3+3 Punkte)

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Für  $u \in H^1(\Omega)$  definieren wir  $u^+ := \max(u, 0)$ .

a) Seien  $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$  elliptische Koeffizienten. Zeigen Sie, dass jede schwache Sublösung  $u \in H^1(\Omega)$  die folgende Implikation erfüllt:

$$u^+ \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u^+ = 0$$

b) Wir definieren

$$H_-^1(\Omega) := \{ u \in H^1(\Omega) \mid u^+ \in H_0^1(\Omega) \}.$$

Zeigen Sie, dass  $u \in H_-^1(\Omega)$  genau dann, wenn es Funktionen  $u_k \in H^1(\Omega)$  und kompakte Mengen  $K_k \subset \Omega$  gibt, sodass

$$u_k \rightarrow u \text{ in } H^1(\Omega) \quad \text{und} \quad u_k \leq 0 \text{ auf } \Omega \setminus K_k \text{ fast überall.}$$

c) Zeigen Sie die folgenden beiden Eigenschaften des Raumes  $H_-^1(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} u \in H_-^1(\Omega), v \in H_0^1(\Omega) &\Rightarrow u \pm v \in H_-^1(\Omega) \\ u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), u \leq 0 \text{ auf } \partial\Omega &\Rightarrow u \in H_-^1(\Omega). \end{aligned}$$

*Hinweise:*

1. Zu a) Testen Sie die Ungleichung (wie in (1) definiert) mit einer schlaunen Testfunktion und nutzen Sie ohne Beweis, dass mit  $u$  auch  $u^+$  schwach differenzierbar mit  $\nabla(u^+) = 1_{[u>0]} \nabla u$  ist.
2. Zu b)  $u = u^+ - u^-$  mit  $u^- = \max(-u, 0)$ . Sie dürfen ohne Beweis nutzen: Ist  $f \in H^1(\Omega)$  und  $f = 0$  fast überall auf  $\Omega \setminus K$  für eine kompakte Menge  $K \subset \Omega$ , so gilt  $f \in H_0^1(\Omega)$ . Auch dürfen Sie ohne Beweis nutzen, dass  $f_k \rightarrow f$  in  $H^1$  auch  $f_k^+ \rightarrow f^+$  in  $H^1$  impliziert.
3. Zu c) Teil b) ist hilfreich. Für die zweite Implikation ist außerdem  $v_\epsilon := (u - \epsilon)^+$  eine hilfreiche Funktion.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

**Abgabe ist am Montag, 21.06.21, 12:15 Uhr**