Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 — SS2021, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 21.6.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Satz über Lebesgue-Punkte*) (4 Punkte)
Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)dy$$

gilt. Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $K_x := \{B_r(q) \mid r > 0, q \in \mathbb{R}^n, x \in B_r(q)\}$. Zeigen Sie, dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgendes gilt: Sind $(B_n) \subset K_x$ mit $\operatorname{diam} B_n \to 0$, so gilt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} f(y)dy.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\rho \in (0, \frac{|a|}{20})$. Wir definieren

$$f_{a,\rho} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f_{a,\rho}(x) := \rho^{-n} 1_{B_\rho(0)}(x) - \rho^{-n} 1_{B_\rho(a)}(x).$$

Zeigen Sie $||f_{a,\rho}||_{\mathcal{H}^1} = \Theta(\ln \frac{|a|}{\rho})$ für $|a| \to \infty$.

Hinweise

1. *Θ ist ein Landau- Symbol: $f = \Theta(g)$, falls es $c_1, c_2 > 0$ und $x_0 > 0$ gibt, sodass $c_1 \le \frac{f(x)}{g(x)} \le c_2$ für alle $x \ge x_0$.*
2. *Überlegen Sie sich, dass es genügt den Fall $\rho = 1$ zu betrachten, indem sie $||f_{a,\rho}||_{\mathcal{H}^1} = ||f_{\frac{a}{\rho},1}||_{\mathcal{H}^1}$ zeigen.*
3. *Setzen Sie für $2 \le |x| \le \frac{|a|}{8}$ in die Definition von $f^*(x)$ den Wert $r = 4|x|$ ein und folgern Sie für solche x die Abschätzung $|f^*(x)| \ge c|x|^{-n}$ für ein $c > 0$*
4. *Gehen Sie wie im Beweis von Lemma 9.8 iv) vor. Zunächst betrachten Sie den Fall $x \le 2$ und $|x - a| \le 2$. Anschließend den Fall $|x|, |x - a| \ge 2$. Machen Sie im zweiten Fall eine Fallunterscheidung für kleine und große r wie in 9.8.*

Aufgabe 3 (8+2* Punkte)
Zeigen Sie, dass für $p \in (1, \infty)$ der Raum $L^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ liegt. Gehen Sie wie folgt vor:

Es seien $\eta, \phi \in C_0^\infty(B_1(0))$ übliche Glättungskerne (also $\eta, \phi \ge 0$ und $\int \eta = \int \phi = 1$.) Für $\epsilon, t > 0$ seien $\eta_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \eta(\frac{x}{\epsilon})$ und $\phi_t(x) = t^{-n} \phi(\frac{x}{t})$.

1. Zeigen Sie $\operatorname{supp}(\phi_t * \eta_\epsilon) \subset B_{t+\epsilon}(0)$ und $\sup |\phi_t * \eta_\epsilon| \leq \frac{C}{|\epsilon+t|^n}$.

2. Für $a \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|(\eta_\epsilon * \phi_t * f)(x) - a| \leq \frac{C}{(t+\epsilon)^n} \int_{B_{t+\epsilon}(x)} |f(y) - a| d^n y.$$

3. Für $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|(\eta_\epsilon * g)(x) - g(x)| \leq C\epsilon \sup |\nabla g|.$$

4. Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$h_\epsilon(x) := (\eta_\epsilon * f - f)^*(x) = \sup_{t>0} |(\eta_\epsilon * \phi_t * f)(x) - (\phi_t * f)(x)|$$

sowie $h(x) := \limsup_{\epsilon \to 0^+} h_\epsilon(x)$. Zeigen Sie $h(x) = 0$ für fast alle x.

5. Zeigen Sie $||((\eta_\epsilon * f) - f)^*||_{L^1} \to 0$ für $\epsilon \to 0^+$, falls $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Hinweise

1. *Zu a): Nutzen Sie die Ungleichung* $\sup |f * g| \leq \sup |f| \; ||g||_{L^1}$. *Außerdem ist die Fallunterscheidung* $\epsilon \leq t$ *oder* $\epsilon > t$ *hilfreich.*

2. *Zu d) Es sei* $\delta > 0$. *Wir setzen*

$$a_\delta := \limsup_{\epsilon \to 0^+} \sup_{0<t\leq\delta} |(\eta_\epsilon * \phi_t * f)(x) - (\phi_t * f)(x)|,$$
$$b_\delta := \limsup_{\epsilon \to 0^+} \sup_{t>\delta} |(\eta_\epsilon * \phi_t * f)(x) - (\phi_t * f)(x)|.$$

Zeigen Sie, dass $b_\delta(x) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $a_\delta(x) = 0$ *für alle Lebesgue Punkte von* f *gilt. Für die zweite Aussage ist eine Möglichkeit die folgende: Sei* $\epsilon_m \downarrow 0$ *eine Folge, sodass* $a_\delta := \lim_{m\to\infty} \sup_{0<t\leq\delta} |(\eta_{\epsilon_m} * \phi_t * f)(x) - (\phi_t * f)(x)|$ *und* $t_m > 0$, *sodass*

$$\sup_{0<t\leq\delta} |(\eta_{\epsilon_m} * \phi_t * f)(x) - (\phi_t * f)(x)| \leq \epsilon_m + |(\eta_{\epsilon_m} * \phi_{t_m} * f)(x) - (\phi_{t_m} * f)(x)|.$$

Ohne Einschränkung konvergiert $t_m \to t^*$, *denn...? Zeigen Sie nun, dass die rechte Seite in dieser Ungleichung gegen* 0 *konvergiert. Hierfür unterscheiden Sie die Fälle* $t^* = 0$ *und* $t^* > 0$.

3. *Zu e) Die folgende Variante des Satzes von Lebesgue dürfen Sie ohne Beweis nutzen: Sind* $(g_k) \subset L^1$ *mit* $g_k \to g$ *punktweise fast überall und sind* $f, f_k \in L^1$ *mit* $|g_k| \leq f_k$ *und* $f_k \to f$ *in* L^1, *so ist* $g \in L^1$ *und es gil* $g_k \to g$ *in* L^1.
Außerdem ist Lemma 9.9 i) hilfreich.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 28.6.21, 12:15 Uhr