Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 | SS2021, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang | 28.06.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Schwache (stationäre) harmonische Abbildungen*) (2+2+2 Punkte)
Es sei $n \geq 3$ und $B := B_1(0)$ die offene Kugel mit Radius 1 um 0. In dieser Aufgabe betrachten wir die Dirichlet Energie

$$E[u] := \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2.$$

Wir setzen $u : B \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ als $u(x) := \frac{x}{|x|}$.

a) Zeigen Sie, dass u schwach harmonisch ist.

b) Zeigen Sie, dass u stationär ist. Das heißt, dass für alle $\varphi \in C^\infty(B, \mathbb{R}^n)$

$$\int_B \left[2\,(\nabla u)^T\,\nabla u - |\nabla u|^2\,\mathrm{Id}\right] \cdot \nabla\varphi = 0$$

gilt. Hierbei bezeichnet Id die Identität auf $\mathbb{R}^n$ und

$$\left[(\nabla u)^T\,\nabla u\right]^\alpha_{\ \beta} := \partial_\alpha u \cdot \partial_\beta u.$$

c) Für $r > 0$ und $u : B_r \to \mathbb{R}^n$ betrachten wir nun die skalierte Energie $E[u, r] := r^{2-n} \int_{B_r} |\nabla u(x)|^2 d^n x$. Drücken Sie $E[u, r]$ durch $E[\cdot, 1]$ und $v \circ r : B \to \mathbb{R}^n, x \mapsto u(rx)$ aus.

Hinweise:

1. *Zu a): Offensichtlich ist $u \in C^\infty(B\backslash\{\,0\,\})$. Überlegen Sie sich zunächst, dass $\Delta u = -|\nabla u|^2 u$ auf $B\backslash 0$ gilt. Zeigen Sie anschließend, dass u diese Gleichung schwach löst, indem Sie wie üblich die Menge $B\backslash B_\epsilon(0)$ mit $\epsilon \to 0^+$ betrachten.*

2. *Zu b): Glücklicherweise ist u explizit und man kann [...] explizit ausrechnen.*

Aufgabe 2 (*Das Lemma von Weyl*) (4 Punkte)
Es seien $u, v, f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, sodass

$$\Delta u = \Delta v = f$$

im distributionellen Sinne gilt. Zeigen Sie, dass $w := u - v$ eine glatte (d.h. C^∞) harmonische Funktion ist.

Hinweis:

1. *Zeigen Sie für $R > 0$, dass $w \in H^1(B_R)$ und nutzen Sie anschließend elliptische Regularitätstheorie.*

2. *Um $w \in H^1(B_R)$ zu erhalten definieren Sie $w_\epsilon := \eta_\epsilon * w$ für $\epsilon \in (0,1)$. Zeigen Sie $\Delta w_\epsilon = 0$ und testen Sie diese Gleichung geschickt um $||\nabla w_\epsilon||_{L^2(B_R)} \leq C$ mit C unabhängig von ϵ zu erhalten. (Am liebsten würde man mit w_ϵ testen. Leider hat w_ϵ aber keinen kompakten Support, also...?). Der Kandidat für die schwache Ableitung von w ist dann der schwache Grenzwert von ∇w_ϵ in L^2*

Aufgabe 3 (*Stetigkeit von $W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$-Funktionen mit $\nabla^2 u \in L^1(\mathbb{R}^2)$*) (2+1+3 Punkte)
Zeigen Sie Lemma 9.14:

Lemma. *Ist $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ mit $\nabla^2 u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, so ist u stetig und es existiert eine lineare Funktion $l(x) = a + b \cdot x$, sodass*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |u(x) - l(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 \partial_2 u(y)| dy. \tag{1}$$

Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

a) Es sei zunächst $v \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass dann

$$v(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \partial_{12}^2 v(s,t) ds dt \quad \text{für fast alle } (x_1, x_2) \tag{2}$$

gilt, indem Sie diese Formel zunächst für $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ herleiten und anschließend mit der Dichtheit der Testfunktionen in $W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ argumentieren.

b) Sei nun $v \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ mit $D^2 v \in L^1(\mathbb{R}^2)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Sei $\eta \in C^\infty(B_2(x_0))$ eine Cutoff-Funktion mit $\eta \equiv 1$ auf $B_1(x_0)$. Zeigen Sie, dass $\eta v \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ gilt und verwenden Sie Teil a) um die Stetigkeit von v in x_0 zu erhalten. Folgern Sie nun die Stetigkeit von v in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^2$.

Nun ist nur noch (1) für $v \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ mit $D^2 v \in L^1(\mathbb{R}^2)$ zu zeigen.

c) Sei $v \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ mit $D^2 v \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Schauen Sie sich nochmal Aufgabe 3 auf Blatt 7 an und überlegen Sie sich, dass es Funktionen $v_k \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ der Form

$$w_k(x) = \eta_k(x)\,(v(x) - a_k - b_k \cdot x) \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{R} \text{ und } b_k \in \mathbb{R}^2$$

gibt, sodass $D^2 w_k \to D^2 v$ in $L^1(\mathbb{R}^2)$ gilt. Zeigen Sie, dass a_k und b_k längs einer Teilfolge gegen $a \in \mathbb{R}$ bzw. $b \in \mathbb{R}^2$ konvergieren und setzen Sie $l(x) := a + b \cdot x$. Zeigen Sie die Formel (1), indem Sie (2) auf w_k anwenden und $w_k \to v - l$ punktweise nutzen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, 05.07.21, 12:15 Uhr