Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 SS2021, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang 05.07.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Hausdorff-Mass und Hausdorff-Dimension*) (6 Punkte)
Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $s, \epsilon > 0$. Wir betrachten den Ausdruck

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{diam}(B_i) \right)^s \;\middle|\; B_i \subset \mathbb{R}^n \text{ Kugeln mit } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \text{ und } \operatorname{diam}(B_i) < \varepsilon \right\}.$$

(a) Zeigen Sie

$$\mathcal{H}^s_{\varepsilon_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\varepsilon_2}(A), \quad \text{falls } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2.$$

Wir bemerken, dass daher $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$ existiert und $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$ gilt. Damit ist $\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$ wohldefiniert. Man kann zeigen, dass dies ein äußeres Maß definiert.

(b) Es gelte $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Zeigen Sie $\mathcal{H}^{s'}(A) =$ für $s' > s$. Nun gelte zusätzlich $\mathcal{H}^s(A) > 0$. Zeigen Sie $\mathcal{H}^{s'}(A) = \infty$ für $s' < s$.

Dies motiviert die Hausdorff-Dimension s von A. Geben Sie die Definition an.

(c) Berechnen Sie $\mathcal{H}^1(\{(0,0)\}), \mathcal{H}^1([0,1] \times \{0\})$ und $\mathcal{H}^1([0,1]^2)$.

Aufgabe 2 (*harmonische Abbildung von $B_r \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{S}^{N-1}$*) (10 Punkte)
Es bezeichne B_1 die offenen Einheitskugel $B_1 := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Wir parametrisieren ∂B_1 durch $\partial B_1 = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Hierdurch erhalten wir die Identifikation

$$v : \partial B_1 \to X \;\text{ und }\; \hat{v} : [0, 2\pi) \to X,\; \hat{v}(\varphi) := v(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

X steht hier für einen beliebigen Wertebereich. Wir definieren nun $H^1(\partial B_1, X)$ durch

$$v \in H^1(B_1, X) :\Leftrightarrow \hat{v} \in H^1((0, 2\pi), X).$$

Für $v \in H^1(\partial B_1, X)$ ist die tangentiale Ableitung $\partial_{\tan} v$ die Funktion auf ∂B_1, die zu $\hat{v}'$ assoziiert ist.

Wir bemerken, dass die Sobolev-Einbettung $H^1(\partial B_1) \hookrightarrow C^\alpha(\partial B_1)$ gilt.

(a) Sei $v \in H^1(\partial B_1, \mathbb{R}^N)$ mit $|v(x)| = 1$ auf ∂B_1 und

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_1} |\partial_{\tan} v|^2 dS \leq \frac{1}{16\pi^2}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in H^1(B_1, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{B_1}, \mathbb{R}^N)$ existiert, die $|u(x)| = 1$, $\forall x \in \overline{B_1}$, $u = v$ auf ∂B_1 und

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\partial B_1} |\partial_{\tan} v|^2 dS \tag{2}$$

erfüllt. u ist eine Fortsetzung von v in $H^1 \cap C^0$.

(b) Für in (a) gebende Funktion v suchen wir ein Minimierer des Problems

$$\inf_{u \in X} \int_{B_1} |\nabla u|^2 dx$$

mit $X := \{u \in H^1(B_1, \mathbb{R}^N)$ mit $|u| = 1$ f. ü. & $u - v \in H_0^1(B_1, \mathbb{R}^n)\}$. (a) impliziert $X \neq \emptyset$. Mit Lax-Milgram kann man leicht zeigen, dass der Minimierer existiert. (Dieser ist eine harmonische Funktion mit gebender Randbedingung, $u = v$ auf ∂B_1.)

Sie u nun der Minimierer. Für $r \in (0, 1]$ setze

$$f(r) := \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx.$$

Wir nehmen im Folgenden $f(1) \leq 1$ an. Zeigen dass es eine Konstante $M \geq 1$ gibt, sodass

$$f(r) \leq M r f'(r), \qquad \text{für f. ü. } r \in (0, 1).$$

(c) Folgern Sie aus (b), dass $r \mapsto r^{-1/M} f(r)$ monoton steigend ist somit $f(r) \leq r^{1/M} f(1)$ gilt. Schließen Sie $u \in C^0$. Dann folgt aus der Vorlesung sogar $u \in C^\infty$ und damit, dass u harmonisch ist.

Hinweise:

1. *Zu a): Es sei $x_0 \in \partial B_1$ und $p_0 = v(x_0)$. Betrachten Sie $\tilde{u} = p_0 + |x|(v(x/|x|) - p_0)$ und zeigen dass $|\tilde{u} - p_0| \leq 1/2$ (Hierfür nutzen Sie den Hauptsatz in H^1. Um diesen zu zeigen sind ein Dichtheitsargument und die Einbettung $H^1(\partial B_1) \hookrightarrow C^\alpha(\partial B_1)$ hilfreich) Betrachten Sie nun die Projektion $P : \mathbb{R}^N \backslash B_{1/2} \to \mathbb{S}^{N-1}$, definiert durch $P(y) := y/|y|$ und setzen Sie $u := P \circ \tilde{u}$.*

2. *Zu b): Für fast alle r gilt $f'(r) = \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 \geq \int_{\partial B_r} |\partial_{\tan} u|^2$. Falls $r f'(r) \geq \frac{1}{8\pi}$ ist nichts zu zeigen, denn...? Falls $r f'(r) < \frac{1}{8\pi}$ benutzen Sie (a) und die Definition von u als Minimierer.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 12.07.21, 12:15 Uhr