Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE 2 SS2021, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang 12.07.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Die obere Kontaktmenge*) (4 Punkte)

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\sup_\Omega u > 0$. Zeigen Sie, dass die obere Kontaktmenge $\Gamma_u^+ \neq \emptyset$ nicht leer ist und, dass für alle $x \in \Gamma_u^+$ gilt $u(x) > 0$.

b) Ist $u \in C^1(B_1) \cap C^0(\bar{B}_1)$ mit $u|_{\partial B_1} = 0$, so gilt für jedes $x \in \Gamma_u^+$

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{u(x)}{1 - |x|}.$$

Aufgabe 2 (*Subdifferential und Superdifferential*) (4 Punkte)
Wir sagen, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *superdifferenziebar* ist, falls ein Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$f(x) \leq f(x_0) + p \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \to x_0.$$

In diesem Fall nennen wir p einen *Supergradienten* von f an der Stelle x_0 und bezeichnen die Menge aller Supergradienten von f in x_0 als das *Superdifferential*, welches wir mit $\partial^+ f(x_0)$ notieren.

Analog (mit $\geq$ statt $\leq$) definiert man *Subdifferenzierbarkeit*, *Subgradient und das Subdifferential* $\partial_- f(x_0)$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Existieren $p \in \partial^+ f(x_0)$ und $q \in \partial_- f(x_0)$, so ist f in x_0 differenzierbar und es gilt $p = q = \nabla f(x_0)$.

b) Es gilt die *Kettenregel*: Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 superdifferenziebar mit $p \in \partial^+ f(x_0)$ und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und an der Stelle $y_0 := f(x_0)$ superdifferenziebar mit $\tau \in \partial^+ \phi(y_0)$, so ist $\phi \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 superdifferenziebar mit $\tau p \in \partial^+(\phi \circ f)(x_0)$.

Aufgabe 3 (*Isoperimetrische Ungleichung*) (4 + 4 + 4* Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und glatt. Betrachten Sie das Neumann-Problem

$$\begin{cases} \Delta u &= \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 1, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Man kann zeigen, dass (1) eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ hat. Dies wollen wir für diese Aufgabe hinnehmen. Zeigen Sie die isoperimetrische Ungleichung von Dido indem die den folgenden Schritten folgen:.

(a) Betrachten Sie die *untere Kontaktmenge*

$$\Gamma_+^u := \{y \in \Omega \,|\, \forall x \in \Omega : \; u(x) \geq u(y) + \nabla u(y) \cdot (x - y)\}.$$

Zeigen Sie

$$B_1 \subset \nabla u(\Gamma_+) \quad \text{und} \quad \nabla^2 u(y) \geq 0 \text{ für alle } y \in \Gamma_+^u.$$

Hierbei bezeichnet $B_1 := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| < 1\}$ den ofenen Einheitsball und $\nabla^2 u$ die Hesse-Matrix von u.

(b) Begründen Sie jede Ungleichung, die wir im Folgendem benutzen:

$$\begin{aligned} |B_1| &\leq |\nabla u(\Gamma_+^u)| = \int_{\nabla u(\Gamma_+^u)} dp \\ &\leq \int_{\Gamma_+^u} |\det(\nabla^2 u)| dx \\ &\leq \int_{\Gamma_+^u} \left(\frac{\Delta u}{n}\right)^n dx = \int_{\Gamma_+^u} \left(\frac{|\partial\Omega|}{n|\Omega|}\right)^n dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{|\partial\Omega|}{n|\Omega|}\right)^n dx = \frac{|\partial\Omega|^n}{n^n |\Omega|^{n-1}} \end{aligned}$$

Es folgt die isoperimetrische Ungleichung

$$\frac{|\partial\Omega|^n}{|\Omega|^{n-1}} \geq n^n |B_1| = \frac{|\partial B_1|^n}{|B_1|^{n-1}}. \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass in (2) genau dann Gleichheit gilt, wenn Ω eine Kugel ist.

Sie haben einen der wichtigsten und schönsten Sätze bewiesen!

Hinweise:

1. *Zu a): Für $\xi \in B_1$ betrachten Sie die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = u(x) - x \cdot \xi$. Nutzen Sie die Neumann-Bedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 1$ um zu zeigen, dass f ihr Minimum in einem $x_\xi \in \Omega$ annimmt. Leiten Sie nun $\xi = \nabla u(x_\xi)$ und $x_\xi \in \Gamma_+^u$ her.*
2. *Zu b): Kapitel 11. Insebsondere 11.4 könnte helfen.*
3. *Zu c): Für Gleichheit muss $\det(\nabla^2 u) = \left(\frac{\Delta u}{n}\right)^n$ gelten. Zeigen Sie, dass dies nur für Funktionen $u(x) = a|x|^2 + b \cdot x + c$ gilt. Nutzen Sie nun die Neumann-Bedingung um zu folgern, dass Ω eine Kugel ist.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 19.07.21, 12:15 Uhr