Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2016, Serie 1
Prof. Dr. G. Wang — 18.4.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*Gaußscher Integralstaz*) (4 Punkte)
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, y - \frac{y^2}{2} + \sin x).$$

Weiter seien die Kurven $\Gamma_1 := \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$ und $\Gamma_2 := \{(x, y)| \max(|x|, |y|) = 1\}$ gegeben. Berechnen Sie $\int_{\Gamma_i} f \cdot \nu_i(x)dS(x)$ für $i = 1, 2$. (Dabei ist ν_i die äußere Normale des von Γ_i berandeten beschränkten Gebietes.)

Aufgabe 2 (*Transformation*) (4 Punkte)
Es seieb B eine reele $n \times n$-Matrix, $c \in \mathbb{R}^n$, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Bx + c$, und $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Man zeige

$$-\Delta(u \circ Q) = (L_0 u) \circ Q,$$

wobei $L_0 := -\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ ist und die a_{ik} die Elemente der Matrix $A := BB^t$ sind. Insbesondere ist also $\Delta(u \circ Q) = (\Delta u) \circ Q$, wenn B eine orthogonale Matrix ist.

Aufgabe 3 (*Separationsansatz*) (4 Punkte)
Wie in der Vorselung, mit der Separationsansatz $u(x, t) = w(x)v(t)$ untersuchen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ u = \phi & \text{auf } (\partial\Omega \times [0, T)) \cup (\Omega \times \{0\}) \end{cases}$$

Aufgabe 4 (*harmonische Funktion*) (4 Punkte)
Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$. Weiter sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine harmonische Funktion mit den Randwerten $u|_{\partial\Omega} = 1 + 3y^2$. Geben Sie, ohne u explizit zu berechnen, den maximalen Wert von u in $\overline{\Omega}$ und den Funktionswert $u(0)$ an.

Aufgabe 5 (*p-harmonische Funktion*) (4 Punkte)
Wie in der Vorlesung leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von

$$\frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx \qquad p > 1$$

her.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 25.04, vor der Vorlesung**.