Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2016, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 27.6.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*Kontaktmenge*) (4 Punkte)

Es sei $u \in C(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\sup_\Omega u > 0$. Sie Zeigen:
(1) Die Kontaktmenge von u, $\Gamma^+ \neq \emptyset$ und $u(x) > 0$ in Γ^+.
(2) Ist $\Omega = B_1$ und $u \in C^1(B_1)$. Für jedes $x \in \Gamma^+$ gilt $|\nabla u(x)| \leq \frac{u(x)}{1-|x|}$

Aufgabe 2 (*Subdifferential und Superdifferential*) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f is *superdifferenziebar* an der Stelle x_0, falls ein Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f(x) \leq f(x_0) + p \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für hinreichend klein $|x - x_0|$. Dann p heißt *Supergradient* von f an der Stelle x_0 und das *Superdifferential* $\partial^+ f(x_0)$ ist die Menge aller Supergradienten von f im Punkt x_0. Man kann *subdifferenziebar*, *Subgradient und Subdifferential* $\partial_- f(x_0)$ (mit $\geq$) entsprechend definieren.
Sie zeigen:
(1) Falls für ein x_0 $p \in \partial^+ f(x_0)$ und $q \in \partial_- f(x_0)$ existieren, dann ist f differenziebar in x_0, und $p = q = \nabla f(x_0)$.
(2) (Kettenregel) Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ superdifferenziebar an der Stelle x_0 mit $p \in \partial^+ f(x_0)$ und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ superdifferenziebar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ mit $\tau \in \partial^+\phi(y_0)$. Dann ist $\phi \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ superdifferenziebar an der Stelle x_0 mit $\tau p \in \partial^+(\phi \circ f)(x_0)$

Aufgabe 3 (*Darstellungsformel für die L^p Funktionen*) (4 Punkte)
Es sei μ das Lebesgue-Mass in $\mathbb{R}^n$. Es seien $1 \leq p < \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann gilt für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \mu(\{x : |f(x)| > t\}) t^{p-1} dt.$$

Hinweis: Schritt 1. Für einfache Funktion $a\chi_E$ für messbare Menge E und $a \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Linearität des Integrals folgt damit die Aussagen auch für Treppenfunktionen. Schritt 2. Für eine beliebige messbare Funktion f wählen Sie eine monotone Folge von Treppenfunktionen T_n mit $T_n|f|$ (punktweise). Dann verwenden Sie dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 4.7., vor der Vorlesung** .