Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2016, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 4.7.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*MP der subharmonischen Funktionen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega = B_R \backslash \overline{B}_r \subset R^2$ mit $R > r > 0$. Wir wissen, dass $\phi(x) = a + b \log |x|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ harmonisch in Ω sind. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ subharmonisch, also $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Sie zeigen

$$\log \frac{R}{r} \cdot M(t) \leq M(r) \cdot \log \frac{R}{t} + M(R) \cdot \log \frac{t}{r}, \quad \forall t \in (r, R)$$

wobei $M(t) := \max_{\partial B_t} u(x)$.

Aufgabe 2 (*MP der Monge-Ampère-Gleichung*) (4 Punkte)

Sei

$$u_1 := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \qquad u_2 := \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Zeigen Sie, dass u_1, u_2 die Monge-Ampère-Gleichung

$$u_{xx} u_{yy} - x_{xy}^2 = 1$$

erfüllen und dass

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \text{auf } \partial B(0, 1).$$

Wie verträgt sich dies mit der Eindeutigkeitsaussage für das Dirichletproblem nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen?

Aufgabe 3 (*MP*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $Lu = \sum_{i,j} a_{ij} u + \sum_i b_i \partial_i u + cu$ wie in der Vorlesung strikt elliptisch mit $c \leq 0$ in Ω. Sei u eine Lösung von $-Lu = f$ für eine $f \in C(\Omega)$ mit $|f| \leq -c$ und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Sie zeigen $|u| \leq 1$.

Aufgabe 4 (*Elliptizität*) (4 Punkte)
Sie zeigen, dass Gleichung vorgegebener Mittlerer Krümmung

$$(1 + |\nabla u|^2) \Delta u - \sum_{i,j} \partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u = nH(x)(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}$$

elliptisch ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 11.7., vor der Vorlesung**.