Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2016, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 11.7.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (0 Punkte)

Sei Ω beschränkt. Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$[u]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

für ein $\alpha > 1$. Zeigen Sie dass $u = const.$ in Ω.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Für $n = 2$ und $\alpha \in (0,1)$. Sei $u \in C(\mathbb{R}^2)$ mit u_{xx}, $u_{yy} \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie $u_{xy} \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine harmonische Funktion. Definieren v durch das Kurvenintegral

$$v(x,y) := \int_\gamma F$$

von dem Vektorfeld $F(x,y) = (u_x(x,y), u_y(x,y))$ längs γ, wobei γ eine Kurve von $(0,0)$ nach (x,y). Zeigen Sie,
(1) v wohl-definiert ist, d.h., v von der Wahl von der Kurve γ unabhängig ist.
(2) v ist auch harmonisch
(3) $f = u + vi$ ist holomorph, d.h., f die Cauchy-Riemann-Gleichung erfüllt.

Aufgabe 4 (0 Punkte)

Seien $n = 2$, $\varepsilon > 0$ und $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2+\varepsilon < y < \pi/2-\varepsilon\}$. Ist u harmonisch mit

$$\limsup_{(x,y)\in\Omega, |x|\to\infty} |u(x,y)|e^{-|x|} = 0.$$

dann gilt $u = 0$ in Ω.
(*Hinweis: Püfen dass* $\phi(x,y) := (\cos y)\cosh x$ *harmonisch ist und Zeigen dass für bliebige* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $R > 0$ *mit* $u \le \varepsilon \cdot \phi$ *auf* $\partial(\Omega \cap \{|x| \le R\})$.)

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Sei $\rho > 0$ und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho, x_n > 0\}$ die obere ρ-Halbkugel, sowie $\Gamma : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ die Fundamentallösung zur Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n$ aus der Vorlesung:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

Ferner wurden die Abbidungen $x \mapsto x^* = \frac{\rho^2}{|x|^2} x$ und $x \mapsto \tilde{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n)$ definiert.
a) Zeigen Sie, dass $\widetilde{x^*} = (\tilde{x})^* =: \tilde{x}^*$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
b) Sei $x \in \Omega$ beliebig. Bestimmen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta w_x &= 0 && \text{in } \Omega, \\ w_x &= \Gamma(\cdot - x) && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(Prüfen Sie Ihr Ergebnis!)
c) Bestimmen Sie die Greenfunktion G zu Ω und verifizieren Sie die Symmetrie von G.

Aufgabe 6 (0 Punkte)

Im $\mathbb{R}^2$ sind Polarkoordinaten durch $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ gegeben. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $v(r,\phi) := u(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Zeigen Sie:

$$\Delta u(\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\phi)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}(r,\phi)$$

Keine Abgabe.