Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2016, Serie 2
Prof. Dr. G. Wang — 25.4.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*diskrete harmonische Funktion*) (4 Punkte)
Eine Funktion $u : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ heißt *(diskrete) harmonische Funktion*, falls gilt

$$u(i,j) = \frac{1}{4}\{u(i-1,j) + u(i+1,j) + u(i,j-1) + u(i,j+1)\}, \quad \forall (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

(eine Mittelwerteigenschaft). Angemmoen, dass u an (0,0) ihres Maximum annimmt. Sie zeigen, dass u konstant ist.

Aufgabe 2(*Schwarzsches Spiegelungsprinzip*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das spiegelsymmetrisch bezüglich der Ebene $E := \{x_n = 0\}$ ist, d.h.

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega \iff (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) \in \Omega.$$

Weiter bezeichne $\Omega^+ := \Omega \cap \{x_n > 0\}$.
Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^0(\overline{\Omega^+})$ harmonisch und $u|_E \equiv 0$, so ist $v : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$v(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n), & \text{falls } x_n < 0 \end{cases}$$

in $C^2(\Omega)$ und harmonisch. (*Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 2.16.*)

Aufgabe 3 (*das Maximumprinzip*) (4 Punkte)
A) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ regulär undund beschränkt, sowie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) \geq \frac{1}{2n} \inf_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2.$$

(*Hinweis. Sie betrachten die Funktion* $w = u + \frac{1}{2n}|x - x_0|^2$.)

B) Sie zeigen
B1) Wenn $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum von u ist, so gilt $\Delta u(x_0) \leq 0$.
B2) u genüge $\Delta u = u^3 - u$ und sei am Rand beschränkt: $|u(\partial\Omega)| \leq 1$. Man zeige, dass $-1 \leq u \leq 1$ in $\overline{\Omega}$ gilt.

Bitten wenden Sie.

Aufgabe 4 (*Harnacksche Ungleichung und Liouvillesch Satz*) (4 Punkte)

1. Sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ harmonisch und nicht-negativ. Leiten Sie aus der Poisson-Formel folgende Version einer Harnackungleichung her:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

   für alle $x \in B_R(0)$.

2. Leiten Sie daraus den Satz von Liouville ab: Eine nach unten (oder oben) beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 02.05., vor der Vorlesung**.