Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2016, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 2.5.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*Kelvin-Transformation*) (4 Punkte)
Es sei $u : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch ($n > 2$). Sei

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

die Kelvin-Transformation. Sie Zeigen, dass v auch harmonisch in $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ ist.

Aufgabe 2 (*harmonische Funktion, Mittelwerteigenschaft*) (4 Punkte)
a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert. Dann ist u in Ω harmonisch.
b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: die Niveaumengen

$$N_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n |\ u(x) = \alpha\}$$

sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ entweder leer oder unbeschränkt.
Hinweis: Mittelwerteigenschaft auf größerer Sphären!

Aufgabe 3 (*die Poisson-Kern*) (4 Punkte)
Sie zeigen,
(a) Sei G die Greensche Funktion für B_R. Dann gilt

$$K(x, y) := \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R|x - y|^n},$$

für alle $x \in B_R$ und $y \in \partial B_R$.
(b)Für fest $x_0 \in \partial B_r$ und $\delta > 0$,

$$\lim_{x\to x_0, |x|<R} K(x, y) = 0 \quad \text{gleichmäßig in } y \in \partial B\backslash B_\delta(x_0).$$

Aufgabe 4 (*Potentielle Abschätzungen*) (4+4 Punkte)
Seieine Lösung von $-\Delta = f$ in B_1 mit $f \in L^p(B_1)$ für $p > n$. Dann ist $u \in C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})$ für ein von p und n abhängiges α, und es gilt

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq const.(\|u\|_{L^2(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)}).$$

Hinweis. Sie betrachten das Newtonpotential

$$w(x) := \int_{B_1} \Gamma(x, y) f(y) dy,$$

und

$$v^i(x) := \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} f(y) dy.$$

Mittels der Hölderschen Ungleichung zeigen Sie zunächst

$$|v^i(x)| \leq C \|f\|_{L^p(B_1)}.$$

Auf diese Weise überlegt man sich, dass $\frac{\partial}{\partial x_i} w = v^i$, und gewinnt die Hölderabschätzung ähnlich wie in der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 09.05., vor der Vorlesung**.