Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2016, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 9.5.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*Innere Abschätzung für bliebiges Gebiet*) (4 Punkte)

Sie zeigen Bemerkung 4.12: Sei Ω ein bliebiges Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$. Sei $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und w das Newton-Potential von f in Ω. Dann gilt $w \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und

$$\Delta w = f \quad \text{ in } \Omega.$$

Weiter gilt

$$|w|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C|f|_{C^\alpha(\Omega)},$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von n, α, Ω und Ω' abhängt.

Aufgabe 2 (*Abschätzung*) (4 Punkte)

Durch Skalierung zeigen Sie die Verallgemeinerung von Theorem 4.13:
Theorem 4.14. Sei B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius R, $f \in C^\alpha(B_R)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und $\|f\|_{C^\alpha(B_R)} < \infty$. Sei $u \in L^\infty(B_R) \cap C^2(B_R)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ in B_R. Dann $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} &R\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} + R^2\|\nabla^2 u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} + R^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_{\frac{R}{2}})} \\ &\leq C(|u|_{L^\infty(B_R)} + R^2|f|_{L^\infty(B_R)} + R^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_R)}), \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine nur von n und α abhängten Konstante ist.

Aufgabe 3 (*Hölderstetigkeit*) (4 Punkte)

(A) Sei zeigen:

(1) Für zwei Funktionen $f_1, f_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ gilt $f_1 \cdot f_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. ($\alpha \in (0,1)$
(2) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und beschränkt, und $f_n : K \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen mit $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_{C^\alpha(K)} \leq C < \infty$. Dann enthält $\{f_n\}$ eine gleichmäßig konvegente Teilfolge.
(3) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Danns ist die Einbettung $C^\beta(\overline{\Omega}) \subset C^\alpha(\overline{\Omega})$ kompakt.

(B) Gilt für alle Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$

$$C^\beta(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega)?$$

Bitten wenden Sie.

Aufgabe 4 (*Innere Kugelbedingung*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^2 glattem Rand. Zeigen Sie, dass Ω der *inneren Kugelbedingung* genügt, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.
Hinweis. Mittels einer geeigneten Drehung um den Punkt x_0 nehmen wir an, dass der Rand von Ω in einer Umgebung von x_0 als Graph einer C^2-Funktion darstellen lässt. ($\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n | x' = (x_1, \cdots, x_{n-1} \in U, x_n = f(x')\}$).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 23.05., vor der Vorlesung**.