Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2016, Serie 5
Prof. Dr. G. Wang — 23.5.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*Interpolation der Normen*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Sie zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ eine Konstante $C = C(\epsilon, n, \alpha, \Omega) > 0$ derart existiert, so dass

$$\|u\|_{C^2} \leq \epsilon[u]_{C^{2,\alpha}} + C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

gilt. (*Hinweis. Widerspruchsargument + Ascoli-Arzelá*)

Aufgabe 2 (*Maximumprinzip und Abschätzung*) (4 Punkte)
Sei $u \in C^3(\overline{\Omega})$ eine Lösung von $-Lu = -\sum_{i,j=2}^n a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x) = 0$ in Ω. Sei der Operator L gleichmäßig elliptisch und $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(i,j = 1, 2 \cdots, n)$.
(a) Setze $v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$. Zeigen Sie $-Lv \leq 0$ in Ω für hinreichend größ $\lambda > 0$.
(b) Sie zeigen

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}).$$

Aufgabe 3 (*Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Auf $\Omega \times [0, \infty) = \{(x_1, \cdots, x_n, t) \,|\, t \geq 0\}$ betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Zeigen Sie, dass für eine Lösung $u \in C^2(\Omega \times (0, T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, T])$ $(T \in (0, \infty))$

$$\sup_{\Omega \times [0,T]} \leq \sup_{P\Omega} u \tag{1}$$

gilt, wobei $P\Omega = \overline{\Omega} \times \{0\} \cup (\partial\Omega \times (0, T])$ ist der parabolische Rand ist.
Hinweis. Schritt 1. Betrachte $u_t - \Delta u < 0$. Schritt 2. Betrachte $v_\epsilon = u - \epsilon t$.
Zusätzlich überlgen Sie, ob die Aussage auch für $T = \infty$ gilt.

Aufgabe 4 (*Wellengleichung*) (4 Punkte)
(a) Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ offen. Kann eine nichtkonstante Lösung $u \in C^2(\Omega)$ der Differentialgleichung

$$u_{xy} = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{2}$$

ein inneres Maximum in Ω annehmen?
(b) Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von (2). Definiere $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ mit $\xi = x + y$ und $\eta = x - y$. Sie leiten eine Differentialgleichung für v her.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 30.05., vor der Vorlesung**.