Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2016, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 30.5.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*Semilineares Maximumprinzip*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}u$ gleichmäßig elliptisch mit $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$. Weiter sei $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, z, p) \mapsto b(x, z, p)$, stetig in x, z und p, lokal Lipschtz stetig in p und monoton nichtfallend in z, d.h.,

$$(z_1 - z_2)\{b(x, z_1, p) - b(x, z_2, p)\} \geq 0 \quad \forall x, z_1, z_2, p \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funtionen $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mögen die Relationen

$$\begin{aligned} -Lu_1 + b(\cdot, u_1, \nabla u_1) &\leq -Lu_2 + b(\cdot, u_2, \nabla u_2), \text{ in } \Omega, \\ u_1 &\leq u_2, \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

erfüllen. Zeige: Dann gilt $u_1 \leq u_2$ in Ω. (*Hinweis.* Angenommen $D = \{x \in \Omega \,|\, u_1(x) > u_2(x)\} \neq \emptyset$. Betrachte die Gleichung in D.)

Aufgabe 2 (*Maximumprinzip ohne der Bedingung $c \leq 0$*) (4 Punkte)
$u \in C^2(\Omega)$ sei eine Unterlösung eines linearen strikt elliptischen Differentialoperators $L = \sum_{ij} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_i b_i\partial_i u + cu$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend,

$$-Lu \leq 0$$

in Ω mit $|a_{ij}|, |b_i|, |c| \leq \Lambda$, für den ein v mit $v > 0$,

$$-Lv \geq 0$$

in Ω existiert.

1. Zeigen Sie, dass $w := u/v$ kein positives Maximum in Ω annehmen kann, außer wenn w konstant ist.
   (*Hinweis: Zeigen Sie* $-\big\{ \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}w + \sum_i(2a_{ij}v^{-1}\partial_j v + b_i)\partial_i w\big\} \leq 0$ *auf* $D := \{w > 0\}$.)
2. Falls $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ zusätzlich gilt, gilt $u \leq 0$ in Ω.

Aufgabe 3 (*Interpolation*) (4 Punkte)
Sie zeigen Lemma 6.3.3: *Seien $\alpha, \mu \in (0, 1)$ und B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt: für alle $u \in C^2(\overline{B}_R)$*

$$\mu R|\nabla u|_{L^\infty(B_R)} \leq C\big\{\mu^2 R^2|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_R)} + |u|_{L^\infty(B_R)}\big\}.$$

Bitten wenden Sie

Aufgabe 4 (*Stetigkeitsmodul*) (4 Punkte)

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Der Stetigkeitsmodul ω_f von f auf Ω ist definiert durch

$$\omega_f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \Omega, |x - y| < \delta.\}$$

Sie zeigen,

1. ω_f ist monoton wachsend.
2. ω_f ist subadditiv, *d.h.* für alle $\delta, \delta' \in (0,\infty)$ gilt $\omega_f(\delta + \delta') \leq \omega_f(\delta) + \omega_f(\delta')$.
3. f ist auf Ω genau dann gleichmäßig stetig, falls $\lim_{\delta \to 0, \delta > 0} \omega_f(\delta) = 0$.

Korrektur. In Aufgabe 4, ist entweder Ω konvex, oder sollen wir $|x - y|$ durch $d(x, y)$ ersetzen, wobei $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Metrik in Ω ist, z.B., die kleinste Abstand zwischen $x, y \in \Omega$ in Ω.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 06.06., vor der Vorlesung**.