Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2016, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 6.6.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*Hölderstetigkeit und Oszillation*) (4 Punkte)
Sie zeigen
(1) $[fg]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \le [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}|g|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{L^\infty(\Omega)}[g]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$ für alle $f, g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.
(2) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be beschränkt, $\theta \in (0,1)$. Erfülle $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die folgende Eigenschaft

$$\mathrm{osc}_{B_{\theta r}(y)} f \le \frac{1}{2}\mathrm{osc}_{B_r(y)} f < \infty \quad \text{für alle } B_r(y) \subset \Omega. \tag{1}$$

Sie zeigen, dass $f \in C^\alpha(\Omega)$ mit

$$\alpha = -\frac{\log 2}{\log \theta}.$$

(Hierbei ist die Oszillation von f in D definiert durch $\mathrm{osc}_D f = \sup_{x,y\in D} |f(x) - f(y)|$.)

(*Hinweis. Für jedes $x \in B_r(y)$ gibt es eine Ganzahl $k \ge 0$ mit $\theta^k r \le |x-y| \le \theta^{k+1} r$. Sie schätzen den Quotient $|f(x) - f(y)|/|x-y|^\alpha$ mit (1) ab und zeigen dass der Quotient beschränkt ist, d.h., der nicht von k anhängt ist, wenn $\alpha = -\log 2/\log\theta$.*)

Aufgabe 2 (*gewichte Hölderräume*) (4 Punkte)
Sie zeigen: Für $\sigma + \tau \ge 0$ gilt

$$|fg|_{C^\alpha_{(\sigma+\tau)}(\Omega)} \le |f|_{C^\alpha_{(\sigma)}(\Omega)}|g|_{C^\alpha_{(\tau)}(\Omega)} \quad \forall f \in C^\alpha_{(\sigma)}(\Omega), g \in C^\alpha_{(\tau)}(\Omega).$$

Weiter zeigen Sie, dass

$$C^{k,\alpha}_{(\sigma)}(\Omega) := \{u \in C^{k,\alpha}(\Omega) \mid |u|_{C^\alpha_{(\sigma)}(\Omega)} < \infty\}$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (*Satz von Leray und Schauder*) (4 Punkte)

Sie zeigen den Satz von Leray und Schauder:
Es sei X ein Banachraum und $A : X \to X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung

$$u = Au, \quad u \in X \tag{2}$$

eine Lösung, falls folgende A-priori-Abschätzung gilt:
Es gibt ein $r > 0$ derart, dass

$$\|u\| \le r$$

fur jede Lösung u der Gleichung

$$u = tAu, \quad u \in X, 0 \le t < 1$$

gilt. (Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!)

Beweisidee: Definieren $M := \{u \in X : \|u\| \le 2r\}$ und die Abbildung

$$Bu := \begin{cases} Au, & \text{für } \|Au\| \le 2r, \\ 2r\frac{Au}{\|Au\|}, & \text{für } \|Au\| > 2r, \end{cases}$$

(1) Zeige, dass B eine kompakte Abbildung der Menge M in sich ist.
Eine kompakte Abbildung ist **stetig** *und bildet jede beschränkte Teilmenge auf eine relativ kompakte Teilmenge ab.*

(2) Folgere, dass es einen Fixpunkt für B geben muss und schließlich, da dann auch eine Lösung von (2) existiert.
Sie untersuchen eine rekursive definierte Folge wie in den Beweis von dem Fixpunktsatz von Banach.

Bemerkung. Dies ist ein Beispiel des wichtigen Prinzips: Apriori-Abschätzung gibt Existenz.

Aufgabe 4 (*Anwendung vom Satz von Leray und Schauder*) (4 Punkte)

Benutze den Satz, um die Lösbarkeit des Problems

$$u(x) = \alpha \int_a^b \sin u(y) dy + f(x)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$ im Raum $C([a, b])$ zu zeigen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 13.06., vor der Vorlesung**.