Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2016, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 13.6.16
BSc. Z. Sun

Aufgabe 1 (*Unterlösungen*) (4 Punkte)

Wir definieren wie in Lemma 6.21

$$\mathcal{S}_\phi = \{v \,|\, v \in C(\overline{\Omega}) \text{ ist eine Unterlösung in } \Omega \text{ und } v \le \phi \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Sie zeigen: Sind $v_1, v_2 \cdots, v_k$ in $\mathcal{S}_\phi$, ist

$$v = \max\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$$

auch.

Aufgabe 2 (*Barriere*) (8 Punkte)

Sie zeigen Lemma 6.22: *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in Ω für ein $\alpha \in (0,1)$, $c \le 0$ in Ω. Seien $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$, $\phi \in C(\partial\Omega)$ und u_ϕ die in Lemma 6.21 definierte Funktion. Für einen Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ existiere eine Barriere-Funktion $w_{x_0} \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, d.h., die die folgenden Eigenschaften*

$$\begin{array}{rcll} -Lw_{x_0} & \ge & 1 & \text{in } \Omega, \\ w_{x_0}(x_0) & = & 0, & \\ w_{x_0}(x) & > & 0, & \forall x \in \partial\Omega \backslash \{x_0\}, \end{array}$$

erfüllt. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} u_\phi(x) = \phi(x_0).$$

Der Beweis ist ähnlich wie den Beweis für Theorem 5.18.

Aufgabe 3 (*Differenzquotient*) (4 Punkte)

Sie zeigen Lemma 6.26: *Es seien k eine positive Ganzzahl, u stetige Funktion in Ω und $\Omega' \subset\subset \Omega$.*

1. *Falls $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, dann $\partial_l^h u \in C^{k-1,\alpha}(\Omega')$ und*

$$|\partial_l^h u|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega')} \le C|u|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

für alle $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, wobei $C > 0$ nur von n, k und α abhängig ist.

2. Es gelte $\partial_l^h u \in C^{k-1,\alpha}(\Omega')$ *mit*

$$|\partial_l^h u|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega')} \leq M$$

für alle $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ *und* $l = 1, 2 \cdots, n$. *Dann* $u \in C^{k,\alpha}(\Omega')$ *mit*

$$|u|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq CM,$$

wobei $C > 0$ *nur von* n, k *und* α *abhängig ist.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 20.06., vor der Vorlesung**.