Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2019, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 8.7.19
Dr. F. Dittberner

Aufgabe 1 (*Kontaktmenge*) (4 Punkte)

Es sei $u \in C(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\sup_\Omega u > 0$. Zeigen Sie:

1. Für die Kontaktmenge von u gilt $\Gamma^+ \neq \emptyset$ und $u(x) > 0$ in Γ^+.
2. Ist $\Omega = B_1$ und $u \in C^1(B_1)$, gilt $|\nabla u(x)| \leq \frac{u(x)}{1-|x|}$ für jedes $x \in \Gamma^+$.

Aufgabe 2 (*Subdifferential und Superdifferential*) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f is *superdifferenziebar* an der Stelle x_0, falls ein Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f(x) \leq f(x_0) + p \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für hinreichend kleine $|x - x_0|$. Man nennt p den *Supergradienten* von f an der Stelle x_0 und das *Superdifferential* $\partial^+ f(x_0)$ ist die Menge aller Supergradienten von f im Punkt x_0. Äquivalent (mit $\geq$) definiert man *subdifferenziebar*, *Subgradient und Subdifferential* $\partial_- f(x_0)$.
Zeigen Sie:

1. Falls für ein x_0 $p \in \partial^+ f(x_0)$ und $q \in \partial_- f(x_0)$ existieren, dann ist f differenziebar in x_0, und $p = q = \nabla f(x_0)$.
2. (Kettenregel) Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ superdifferenziebar an der Stelle x_0 mit $p \in \partial^+ f(x_0)$ und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ superdifferenziebar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ mit $\tau \in \partial^+ \phi(y_0)$. Dann ist $\phi \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ superdifferenziebar an der Stelle x_0 mit $\tau p \in \partial^+ (\phi \circ f)(x_0)$.

Aufgabe 3 (*Darstellungsformel für die L^p Funktionen*) (4 Punkte)

Es sei μ das Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$. Es seien $1 \leq p < \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann gilt für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \mu(\{x : |f(x)| > t\}) t^{p-1} dt.$$

Hinweis. Schritt 1: Zeigen Sie die Aussage zunächst für die einfache Funktion $a\chi_E$, wobei $a \in \mathbb{R}$ und E eine messbare Menge ist. Aufgrund der Linearität des Integrals folgt damit die Aussage auch für Treppenfunktionen. Schritt 2: Für eine beliebige messbare Funktion f wählen Sie eine monotone Folge von Treppenfunktionen T_n mit $T_n \to |f|$ (punktweise). Dann verwenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz.

Aufgabe 4 (*MP der subharmonischen Funktionen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega = B_R \backslash \overline{B}_r \subset R^2$ mit $R > r > 0$. Wir wissen, dass $\phi(x) = a + b \log |x|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ harmonisch in Ω ist. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ subharmonisch, also $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Zeigen Sie, dass

$$M(t) \cdot \log \frac{R}{r} \leq M(r) \cdot \log \frac{R}{t} + M(R) \cdot \log \frac{t}{r} \qquad \forall t \in (r, R)$$

gilt, wobei $M(t) := \max_{\partial B_t} u(x)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 15.7., vor der Vorlesung**.