Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2019, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 13.5.19
Dr. F. Dittberner

Aufgabe 1 (*Hölderstetigkeit*) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie:

1) Für zwei Funktionen $f_1, f_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, gilt $f_1 \cdot f_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.
2) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und beschränkt. Sei $f_n : K \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen mit $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_{C^\alpha(K)} \leq C < \infty$. Dann enthält $\{f_n\}$ eine gleichmäßig konvegente Teilfolge.
3) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Dann ist die Einbettung $C^\beta(\overline{\Omega}) \subset C^\alpha(\overline{\Omega})$ kompakt.

b) Gilt für alle Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $0 < \alpha < \beta \leq 1$,

$$C^\beta(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega)?$$

Aufgabe 2 (*Innere Abschätzung für bliebige Gebiete*) (4 Punkte)
Zeigen Sie Bemerkung 4.12: Sei Ω ein bliebiges Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$. Sei $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und w das Newton-Potential von f in Ω. Dann gilt $w \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und

$$\Delta w = f \quad \text{in } \Omega.$$

Weiter gilt

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C\|f\|_{C^\alpha(\Omega)},$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von n, α, Ω und Ω' abhängt.

Aufgabe 3 (*Potentielle Abschätzungen*) (4 Punkte)
Sei u eine Lösung von $-\Delta u = f$ in B_1 mit $f \in L^p(B_1)$ für $p > n$. Dann ist $u \in C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})$ für ein von p und n abhängiges α, und es gilt

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq \text{const.} \left(\|u\|_{L^2(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)}\right).$$

Hinweis. Sie betrachten das Newtonpotential

$$w(x) := \int_{B_1} \Gamma(x,y) f(y) dy,$$

und

$$v^i(x) := \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} f(y) dy.$$

Mittels der Hölderschen Ungleichung zeigen Sie zunächst, dass

$$|v^i(x)| \leq C\|f\|_{L^p(B_1)}$$

gilt. Auf diese Weise überlegt man sich, dass $\frac{\partial}{\partial x_i} w = v^i$ gilt, und gewinnt die Hölderabschätzung ähnlich wie in der Vorlesung.

Aufgabe 4 (*Innere Kugelbedingung*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^2-glattem Rand. Zeigen Sie, dass Ω der *inneren Kugelbedingung* genügt, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Hinweis. Mittels einer geeigneten Drehung um den Punkt x_0 nehmen wir an, dass der Rand von Ω in einer Umgebung von x_0 als Graph einer C^2-Funktion darstellen lässt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 20.5, 14:15 Uhr, vor der Vorlesung oder im Fach von Herrn Schiemanowski im 3. Stock des Mathegebäudes.**