Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2019, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 20.5.19
Dr. F. Dittberner

Aufgabe 1(*Skalierung*) (4 Punkte)
Zeigen Sie durch Skalierung die Verallgemeinerung von Theorem 4.13:

Theorem 4.14. Sei B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius R, $f \in C^\alpha(B_R)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und $\|f\|_{C^\alpha(B_R)} < \infty$. Sei $u \in L^\infty(B_R) \cap C^2(B_R)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ in B_R. Dann ist $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} R\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} + R^2\|\nabla^2 u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} + R^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_{\frac{R}{2}})} \\ \leq C(|u|_{L^\infty(B_R)} + R^2|f|_{L^\infty(B_R)} + R^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_R)}), \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine nur von n und α abhängten Konstante ist.

Aufgabe 2 (*Interpolation der Normen*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$ eine Konstante $C = C(\epsilon, n, \alpha, \Omega) > 0$ existiert, so dass

$$\|u\|_{C^2} \leq \epsilon[u]_{C^{2,\alpha}} + C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

gilt. *Hinweis.* Widerspruchsargument und Arzelá–Ascoli.

Aufgabe 3 (*Eigenschaften der gleichmäßigen Konvergenz*) (4 Punkte)
Sei $w_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von C^1-Funktionen, die gegen w gleichmäßig konvergiert. Weiter konvergiere $\partial_j w_\varepsilon$ gegen v_j gleichmäßig für ein $1 \leq j \leq n$. Dann folgt die Existenz von $\partial_j w$ mit $\partial_j w = v_j$.

Aufgabe 4 (*Stetigkeitsmodul*) (4 Punkte)
Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Das Stetigkeitsmodul ω_f von f auf Ω ist definiert durch

$$\omega_f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \Omega, |x-y| < \delta.\}$$

Zeigen Sie:

1. ω_f ist monoton wachsend.
2. ω_f ist subadditiv, *d.h.* für alle $\delta, \delta' \in (0,\infty)$ gilt $\omega_f(\delta + \delta') \leq \omega_f(\delta) + \omega_f(\delta')$.
3. f ist auf Ω genau dann gleichmäßig stetig, falls $\lim_{\delta\to 0, \delta>0} \omega_f(\delta) = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 27.5, vor der Vorlesung**.