Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2019, Serie 5
Prof. Dr. G. Wang — 27.5.19
Dr. F. Dittberner

Aufgabe 1(*Maximumprinzip und Abschätzung*) (4 Punkte)

Sei $u \in C^3(\overline{\Omega})$ eine Lösung von $-Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x) = 0$ in Ω.
Sei der Operator L gleichmäßig elliptisch und $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

(a) Setze $v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$. Zeigen Sie, dass $-Lv \leq 0$ in Ω für hinreichend großes $\lambda > 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)})$$

gilt.

Aufgabe 2 (*Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Auf $\Omega \times [0, \infty) = \{(x_1, \ldots, x_n, t) \,|\, t \geq 0\}$ betrachte man die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Zeigen Sie, dass für eine Lösung $u \in C^2(\Omega \times (0, T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, T])$ $(T \in (0, \infty))$

$$\sup_{\Omega\times[0,T]} \leq \sup_{P\Omega} u$$

gilt, wobei $P\Omega = \overline{\Omega} \times \{0\} \cup (\partial\Omega \times (0, T])$ der parabolische Rand ist.
Hinweis. Schritt 1: Betrachten Sie $u_t - \Delta u < 0$. Schritt 2: Betrachten Sie $v_\epsilon = u - \epsilon t$.

Überlegen Sie zusätzlich, ob die Aussage auch für $T = \infty$ gilt.

Aufgabe 3 (*Wellengleichung*) (4 Punkte)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Kann eine nichtkonstante Lösung $u \in C^2(\Omega)$ der Differentialgleichung

$$u_{xy} = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

ein inneres Maximum in Ω annehmen?

(b) Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von (1). Definieren Sie $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ mit $\xi = x + y$ und $\eta = x - y$. Leiten Sie eine Differentialgleichung für v her.

Aufgabe 4 (*Maximumprinzip ohne die Bedingung $c \leq 0$*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Unterlösung eines linearen, strikt elliptischen Differentialoperators $L = \sum_{ij} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_i b_i\partial_i u + cu$ mit

$$-Lu \leq 0$$

in Ω, wobei $|a_{ij}|, |b_i|, |c| \leq \Lambda$. Außerdem existiere ein v mit $v > 0$ und

$$-Lv \geq 0$$

in Ω.

1. Zeigen Sie, dass $w := u/v$ kein positives Maximum in Ω annehmen kann, außer wenn w konstant ist.

   Hinweis. Zeigen Sie, dass $-\big\{ \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}w + \sum_i (2a_{ij}v^{-1}\partial_j v + b_i)\partial_i w \big\} \leq 0$ auf $D := \{w > 0\}$ gilt.

2. Zeigen Sie: Falls zusätzlich $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, gilt auch $u \leq 0$ in Ω.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 3.6., vor der Vorlesung**.