Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2019, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 3.6.19
Dr. F. Dittberner

Aufgabe 1 (*Semilineares Maximumprinzip*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}u$ gleichmäßig elliptisch mit $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$. Weiter sei $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, z, p) \mapsto b(x, z, p)$, stetig in x, z und p, lokal Lipschtz stetig in p und monoton nichtfallend in z, d.h.,

$$(z_1 - z_2)\{b(x, z_1, p) - b(x, z_2, p)\} \geq 0 \quad \forall x, z_1, z_2, p \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funtionen $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mögen die Relationen

$$\begin{aligned} -Lu_1 + b(\cdot, u_1, \nabla u_1) &\leq -Lu_2 + b(\cdot, u_2, \nabla u_2) \quad \text{in } \Omega, \\ u_1 &\leq u_2 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

erfüllen. Zeigen Sie, dass dann $u_1 \leq u_2$ in Ω gilt.
Hinweis. Angenommen $D = \{x \in \Omega \,|\, u_1(x) > u_2(x)\} \neq \emptyset$. Betrachten Sie die Gleichung in D.

Aufgabe 2 (*Interpolation*) (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 6.3.3: *Seien $\alpha, \mu \in (0, 1)$ und B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Sei $u \in C^2(\overline{B}_R)$. Dann gilt*

$$\mu R|\nabla u|_{L^\infty(B_R)} \leq C\big\{\mu^2 R^2|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_R)} + |u|_{L^\infty(B_R)}\big\}.$$

Aufgabe 3 (*Hölderstetigkeit und Oszillation*) (4+4 Punkte)
Zeigen Sie:

(1) $[fg]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}|g|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{L^\infty(\Omega)}[g]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$ für alle $f, g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.

(2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\theta \in (0, 1)$. Erfülle $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die folgende Eigenschaft

$$\mathrm{osc}_{B_{\theta r}(y)} f \leq \frac{1}{2}\mathrm{osc}_{B_r(y)} f < \infty \quad \text{für alle } B_r(y) \subset \Omega, \tag{1}$$

wobei die Oszillation von f in D definiert ist durch $\mathrm{osc}_D f = \sup_{x,y\in D} |f(x) - f(y)|$. Zeigen Sie, dass dann $f \in C^\alpha(\Omega)$ gilt mit

$$\alpha = -\frac{\log 2}{\log \theta}.$$

Hinweis. Für jedes $x \in B_r(y)$ gibt es eine ganze Zahl $k \geq 0$ mit $\theta^k r \leq |x - y| \leq \theta^{k+1} r$. Schätzen Sie den Quotienten $|f(x) - f(y)|/|x - y|^\alpha$ mit (1) ab und zeigen Sie, dass der Quotient beschränkt ist und nicht von k anhängt ist, wenn $\alpha = -\log 2/\log \theta$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 17.6., vor der Vorlesung**.