Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2019, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 17.6.19
Dr. F. Dittberner

Aufgabe 1 (*gewichte Hölderräume*) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $\sigma + \tau \geq 0$

$$|fg|_{C^{\alpha}_{(\sigma+\tau)}(\Omega)} \leq |f|_{C^{\alpha}_{(\sigma)}(\Omega)} |g|_{C^{\alpha}_{(\tau)}(\Omega)} \quad \forall f \in C^{\alpha}_{(\sigma)}(\Omega), g \in C^{\alpha}_{(\tau)}(\Omega).$$

gilt. Zeigen Sie weiter, dass

$$C^{k,\alpha}_{(\sigma)}(\Omega) := \{u \in C^{k,\alpha}(\Omega) \mid |u|_{C^{\alpha}_{(\sigma)}(\Omega)} < \infty\}$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 2 (*Kompaktheit der Lösungen*) (4 Punkte)
Zeigen Sie Korollar 6.9:
Sei Ω beschränkt und L einer Operator wie in Bedingung 5.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^{α}-Funktionen in B_R für ein $\alpha \in (0,1)$. Sei $f \in C^{\alpha}(\Omega)$ mit $\|f\|_{C^{\alpha}(\Omega)} < \infty$, und genügte $u_k \in L^{\infty}(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$

$$-Lu_k = f \quad \text{in } \Omega, \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

und

$$\sup_k |u_k|_{L^{\infty}(\Omega)} < \infty.$$

Dann existiert eine Teilfolge $u_{k'}$ und eine Funktion $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ derart, dass $u_{k'} \to u$ in C^2 auf jeder kompakten Teilmenge von Ω und

$$-Lu = f \quad \text{in } \Omega$$

gilt.

Aufgabe 3 (*Satz von Leray und Schauder*) (4 Punkte)
Zeigen Sie den Satz von Leray und Schauder:
Es sei X ein Banachraum und $A : X \to X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung

$$u = Au, \quad u \in X \tag{1}$$

eine Lösung, falls folgende a-priori-Abschätzung gilt:
Es gibt ein $r > 0$ derart, dass

$$\|u\| \leq r$$

fur jede Lösung u der Gleichung

$$u = tAu, \quad u \in X, 0 \leq t < 1$$

gilt. (Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!)

Beweisidee: Definieren Sie $M := \{u \in X : \|u\| \leq 2r\}$ und die Abbildung

$$Bu := \begin{cases} Au, & \text{für } \|Au\| \leq 2r, \\ 2r\frac{Au}{\|Au\|}, & \text{für } \|Au\| > 2r, \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass B eine kompakte Abbildung der Menge M in sich ist.
Eine kompakte Abbildung ist **stetig** *und bildet jede beschränkte Teilmenge auf eine relativ kompakte Teilmenge ab.*

(2) Folgeren Sie, dass es einen Fixpunkt für B geben muss und schließlich, dass dann auch eine Lösung von (1) existiert.
Untersuchen Sie eine rekursive definierte Folge wie in den Beweis von dem Fixpunktsatz von Banach.

Bemerkung. Dies ist ein Beispiel für das wichtige Prinzip, dass Apriori-Abschätzung Existenz von Lösungen liefern.

Aufgabe 4 (*Anwendung vom Satz von Leray und Schauder*) (4 Punkte)
Benutze den Satz von Aufgabe 3, um die Lösbarkeit des Problems

$$u(x) = \alpha \int_a^b \sin u(y) dy + f(x)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$ im Raum $C([a,b])$ zu zeigen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 23.6., vor der Vorlesung**.